681.311

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

И. В. БОЙКОВ, Н. П. КРИВУЛИН

*Пензенский государственный университет,
Пенза, Россия, e-mail: boikov@pnzgu.ru*

Предложен метод идентификации параметров, в частности импульсных переходных функций, в линейных системах с распределенными параметрами, представимых интегральными уравнениями первого рода.

Ключевые слова: *динамические системы, импульсная переходная функция, системы с распределенными параметрами, обобщенная теорема Бореля.*

The method of identification of parameters, particularly of impuls transition functions, of the line systems with distributed parameters is offered.

Key words*: dynamical system, impuls transition function, systems with distributed parameters, generalized Borel theorem.*

При анализе и синтезе динамических систем определяющую роль играют их временные характеристики, идентификации которых посвящена обширная литература [1 – 5].Особое внимание уделяется нахождению импульсной переходной функции $g(t)$ в линейных системах, описываемых линейными уравнениями в свертках $\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t)$, где $x(t)$, $f(t)$ – входной и выходной сигналы; $g(t)$ – импульсная переходная функция.

Методы определения $g(t)$, как правило, являются приближенными за исключением,насколько авторам известно, приведенного в [6, 7] метода точного определения $g(t)$ по двум входным сигналам. Для нелинейных систем, описываемых нелинейными уравнениями в свертках $\int_0^t \sum_{k=1}^{n} g_k(t-\tau)x^k(\tau)d\tau = f(t)$, в [8] предложен метод точного определения импульсной переходной функции по нескольким входным сигналам.

Значительно сложнее задача определения динамических характеристик систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями Вольтерра, на полуоси и оси, соответственно:

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t); \tag{1}$$

$$\int_0^\infty g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t); \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t). \tag{3}$$

Уравнение (1) является частным случаем (2). Действительно, если ввести функцию $K(t, \tau) = 1$ при $t \geq \tau$ и $K(t, \tau) = 0$ при $t < \tau$, то (1) можно представить в виде $\int_0^\infty K(t,\tau)g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t).$

Опишем несколько систем с распределенными параметрами, которые приводят к уравнениям вида (2). Одна из них связана с распространением теплоты на бесконечной прямой.

З а д а ч а К о ш и . Найти ограниченную функцию $u(x, t)$, определенную в области $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\partial u/\partial t = a^2 \partial^2 u/\partial x^2 , \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{4}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty . \tag{5}$$

Известно [9] интегральное представление решения задачи Коши (4), (5)

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^\infty G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi , \text{ где } G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right].$$

Рассмотрим случай, когда известны начальное условие

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), t \geq 0; \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

и решение задачи Коши (4), (5) в точке $x = 0$. Требуется найти коэффициент a.

Задача сводится к уравнению $u(0,t) = \int_0^t G(0,\xi,t)\varphi_0(\xi)d\xi$, а если считать $\varphi_0(\xi)$, $u(0, t)$ соответственно входным и выходным сигналами – то к нахождению функции $G(0, \xi, t)$. Таким образом, задача определения коэффициента a уравнения теплопроводности (4) приводит к интегральному уравнению (2). Аналогичная связь между краевыми задачами и интегральными уравнениями (1), (2) наблюдается для гиперболических и эллиптических уравнений.

Важный момент при создании систем автоматического управления связан с исследованием следующих характеристик системы [10]: времени перерегулирования (переходного процесса); частоты колебаний процесса и времени его установления, декремента затухания. Для исследования этих характеристик необходимо располагать методами нахождения переходных функций или, что то же самое, импульсных переходных функций систем управления. В [11] предложен алгоритм приближенного определения функции $g(t, \tau)$ при подаче на вход ступенчатых сигналов.

Аналитические методы нахождения импульсной переходной функции $g(t, \tau)$ в системах, описываемых (1) – (3), авторам неизвестны, поэтому их разработка представляется актуальной. Данная статья посвящена идентификации импульсной переходной функции $g(t, \tau)$ в системах, представляемых уравнениями (1), (2).

Ниже предлагается алгоритм восстановления импульсной переходной функции в системе с распределенными параметрами, обоснование которого опирается на обобщенную теорему Бореля [12]. Приведем формулировку этой теоремы в обозначениях, несколько отличных от принятых в [12]. Пусть даны два интегральных уравнения Карсона

$$\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt = \Phi(p); \tag{6}$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}\varphi_1(t)dt = \Phi_1(p) \tag{7}$$

и известно решение $\varphi^*(t)$ уравнения (6). Предположим, что существуют аналитические функции $q(p)$ и $u(p)$, такие что правые части уравнений (6), (7) связаны формулой

$$\Phi_1(p) = \Phi(q(p))u(p). \tag{8}$$

Тогда (7) имеет решение $\varphi_1^*(t) = \int_0^\infty \psi(\tau,t)\varphi^*(\tau)d\tau,$ где функция $\psi(\tau, t)$ – решение интегрального уравнения

$$\int_0^\infty \psi(\tau,t)e^{-pt}dt = e^{-\tau q(p)}u(p). \tag{9}$$

Для применения этой теоремы к идентификации динамических систем необходимо ее модифицировать.

Пусть даны два уравнения Карсона (6) и (7), $\varphi^*(t)$ – решение уравнения (6), а правые части этих уравнений связаны формулой (8). Тогда решение уравнения (7) можно выразить как

$$\varphi_1^*(t) = \int_0^\infty \psi(t,\tau)\varphi^*(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где функция $\psi(t, \tau)$ – решение интегрального уравнения $\int_0^\infty \psi(t,\tau)e^{-pt}dt = e^{-\tau q(p)}u(p).$

Доказательство. Решение (6) определяется формулой Бромвича $\varphi^*(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\Phi(p)dp.$ Подставляя в (6) $q(p)$ вместо p, имеем

$$\Phi(q(p)) = \int_0^\infty e^{-tq(p)}\varphi^*(t)dt. \tag{11}$$

Применяя к (7) формулу Бромвича, получаем

$$\varphi_1^*(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{pt}\Phi(q(p))u(p)dp. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12) и меняя порядок интегрирования, находим

$$\varphi_1^*(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_0^\infty \varphi^*(\tau)\left(\int\limits_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{-\tau q(p)+pt}u(p)dp\right)d\tau.$$

Положим $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{-\tau q(p)+pt}u(p)dp=\psi(t,\tau)$, тогда

$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\psi(t,\tau)dt=\mathrm{e}^{-\tau q(p)}u(p).$ Следовательно, (7) имеет решение

$\varphi_1^*(t)=\int\limits_0^\infty \psi(t,\tau)\varphi^*(\tau)d\tau$. Теорема доказана.

Отметим, что справедливо и обратное утверждение: если выполнено условие (9) и функция $\varphi^*(t)$ – решение (6), то функция $\varphi_1^*(t)$, определяемая (10), является решением (7).В самом деле

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\varphi_1^*(t)dt=\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\int\limits_0^\infty \psi(t,\tau)\varphi^*(\tau)d\tau dt=u(p)\int\limits_0^\infty \varphi^*(\tau)\mathrm{e}^{-\tau q(p)}d\tau=u(p)\Phi^*(q(p)),$$

т.е. $\Phi_1^*(p)=\Phi^*(q(p))u(p)$, где $\Phi^*(p),\Phi_1^*(p)$ – преобразования Лапласа функций $\varphi^*(t),\varphi_1^*(t)$. Аналогичные утверждения справедливы и для других интегральных преобразований, в частности, преобразования Фурье.

Пусть даны два интегральных уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}dt=F(z); \tag{13}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty f_1(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}dt=F_1(z) \tag{14}$$

и пусть (13) имеет решение $f^*(t)$. Предположим, что существуют аналитические функции $q(z)$, $u(z)$, такие что правые части (13), (14) связаны формулой $F_1(z) = F(q(z))u(z)$. Тогда решение (14) имеет вид $f_1^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau) f^*(\tau) d\tau,$ где функция $k(t, \tau)$ – решение интегрального уравнения $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau) \mathrm{e}^{\mathrm{i}zt} dt = \mathrm{e}^{-\tau q(z)} u(z).$ Докажем это утверждение.

Решение (13) можно представить формулой

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt} dz.$$

Подставляя в (13) $q(z)$ вместо z, получаем

$$F(q(z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{tq(z)} dt, \tag{15}$$

откуда

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(q(z)) u(z) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt} dz\,. \tag{16}$$

Подставляя (15) в (16) и меняя порядок интегрирования, находим

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau q(z) - zt} dz \right) d\tau.$$

Положим $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau q(z) - \mathrm{i}zt} dz = k(t,\tau)$, тогда $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau) \mathrm{e}^{\mathrm{i}zt} dt = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau q(z)} u(z)$ и, следовательно, (14) имеет решение

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t,\tau) f(\tau) d\tau\,. \tag{17}$$

Отметим что определение коэффициента a параболического уравнения (4) сводится к (2) при условии равенства нулю начального значения на полуоси (–∞, 0). Если использовать (17), то можно показать, что определение коэффициента *a* сводится к (3) при любом начальном значении.

Применение обобщенной теоремы Бореля позволяет найти импульсную переходную функцию для широкого класса устройств.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую интегральным уравнением

$$\int_0^\infty g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \tag{18}$$

где $x(t)$, $f(t)$ – входной и выходной сигналы.

Требуется восстановить функцию $g(t, \tau)$. Пусть она удовлетворяет следующему условию: существуют аналитические функции $q(p)$ и $u(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \ge \sigma (\sigma = \mathrm{const})$, такие что

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} g(t,\tau)dt = \mathrm{e}^{-\tau q(p)} u(p), \quad \operatorname{Re} z \ge \sigma. \tag{19}$$

Пусть $X(p)$, $F(p)$ – преобразования Лапласа соответственно функции $x(t)$ и $f(t)$, которые связаны формулой $F(p) = X(q(p))u(p)$. Тогда

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{-\tau q(p)} u(p) \mathrm{e}^{pt} dp. \tag{20}$$

Вычисляя интеграл в правой части (20) по квадратурным формулам [13], получаем приближенное значение импульсной переходной функции. Отметим, что условие (19) выполняется для широкого класса импульсных переходных функций. В частности, ему удовлетворяют ядра вида $g(t - \tau)$. Продемонстрируем эффективность этого алгоритма на примере классического уравнения Абеля.

Пример 1. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\int_0^t g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad g(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t-\tau}}, & t \ge \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

В качестве входного сигнала примем

$$x(t)=\begin{cases}1/2,\ t\ge 0;\\ 0,\ t<0,\end{cases}\ \text{ а выходного – }\ f(t)=\begin{cases}\sqrt{t}, t\ge 0;\\ 0, t<0.\end{cases}$$

Преобразования Лапласа этих сигналов

$$X(p)=\frac{1}{2p};\quad F(p)=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}=\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Так как $F(p)=X(q(p))u(p)$, то $X(q(p))=1/(2p)$, т.е. $X(q(p))=X(p)$, и значит, $q(p)=p, u(p)=\sqrt{\pi/p}$. Отсюда $G(p,\tau)=\sqrt{\pi/p}\,\mathrm{e}^{-\tau p}$, что соответствует оригиналу $g(t,\tau)=1/\sqrt{t-\tau}$, совпадающему с точным решением.

Пример 2. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\int_0^{\infty} g(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),\quad g(t,\tau)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\tau^2/4t}\Big/\sqrt{\pi t}, & t\ge\tau;\\ 0, & t<\tau.\end{cases}$$

В качестве входного сигнала возьмем

$$x(t)=\begin{cases}\cos t, & t\ge 0;\\ 0, & t<0,\end{cases}\ \text{ а выходного – }\ f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t}, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Преобразования Лапласа этих сигналов

$$X(p)=p\Big/\left(p^2+1\right), F(p)=1\Big/\left(p+1\right).$$

Так как $F(p)=X(q(p))u(p)$, нетрудно показать, что $q(p)=\sqrt{p}$, тогда $u(p)=1/\sqrt{p}$. Действительно,

$$X(q(p))u(p)=\frac{q(p)}{\left(q^2(p)+1\right)\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{p}}{(p+1)\sqrt{p}}=\frac{1}{p+1}=F(p).$$

Таким образом, согласно обобщенной теореме Бореля $G(p,\tau)=\mathrm{e}^{-\tau\sqrt{p}}\Big/\sqrt{p}$, где $G(p,\tau)$ – преобразование Лапласа функции $g(t,\tau)$

по первой переменной. Оригинал функции $G(p, \tau)$ имеет вид $g(t,\tau) = \mathrm{e}^{-\tau^2/(4t)} \big/ \sqrt{\pi t}$, что совпадает с точным решением.

Доказательство справедливости формулы $F(p) = X(q(p))u(p)$ часто оказывается сложной технической задачей. Поэтому на практике применим следующий метод. Предположим, что преобразование Лапласа $G(p, \tau)$ функции $g(t, \tau)$ по переменной t выражается как

$$G(p,\tau) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{-\tau q_k(p)} u_k(p). \tag{21}$$

Отметим, что хотя функция $g(t, \tau)$ и, следовательно, функция $G(p, \tau)$ неизвестны, из характера задачи часто становится ясно, возможно ли разложение в виде (21). В частности, оно имеется при решении обратных задач, описываемых параболическими и гиперболическими уравнениями.

Применим преобразование Лапласа к (18). В результате находим

$$\int_0^\infty x(\tau)\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} g(t,\tau)dt\right)d\tau = \sum_{k=1}^{N} u_k(p)X(q_k(p)) = F(p),$$

откуда следует, что, подавая на вход динамической системы (18) $2N$ линейно независимых сигналов $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., 2N$, получаем систему из $2N$ нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N} u_k(p) X_i(q_k(p)) = F_i(p),\ i = 1,2,...,2N. \tag{22}$$

Для ее решения можно воспользоваться известными в вычислительной математике методами [13]. Найдя функции $u_k(p)$, $q_k(p)$, функцию $g(t, \tau)$ определим, применив интеграл Бромвича к функции $G(p, \tau)$, представимой в виде (21).

Пример 3. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$\int_0^\infty g(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),\quad g(t,\tau) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\tau^2/(4t)} \big/ \sqrt{\pi t} + \mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{t\tau}} \big/ \sqrt{\tau}, & t \ge \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

В качестве входных сигналов примем (здесь N=2 в разложении (21))

$$x_1(t)=\begin{cases}1,\ t\ge 0;\\ 0,\ t<0,\end{cases}\quad x_2(t)=\begin{cases}t,\ t\ge 0;\\ 0,\ t<0,\end{cases}\quad x_3(t)=\begin{cases}t^2/2,\ t\ge 0;\\ 0,\ t<0,\end{cases}\quad x_4(t)=\begin{cases}t^3/6,\ t\ge 0;\\ 0,\quad t<0.\end{cases}$$

Тогда изображения входных и выходных сигналов будут

$$X_1(p)=p^{-1};X_2(p)=p^{-2};X_3(p)=p^{-3};X_4(p)=p^{-4};$$

$$F_1(p)=\frac{1}{p}+\frac{2}{\sqrt{\pi p}};F_2(p)=\frac{1}{p\sqrt{p}}+\frac{8p}{\alpha\sqrt{\pi p}};$$

$$F_3(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{32p^2}{\alpha^2\sqrt{\pi p}};F_4(p)=\frac{1}{p^2\sqrt{p}}+\frac{128p^3}{\alpha^3\sqrt{\pi p}}.$$

В результате (22) примет вид

$$\begin{cases}u_1y_1+u_2y_2=F_1;\\ u_1y_1^2+u_2y_2^2=F_2;\\ u_1y_1^3+u_2y_2^3=F_3;\\ u_1y_1^4+u_2y_2^4=F_4,\end{cases}$$

где $y_1=1/q_1(p)$; $y_2=1/q_2(p)$; $u_1=u_1(p)$; $u_2=u_2(p)$; $F_1=F_1(p)$; $F_2=F_2(p)$; $F_3=F_3(p)$; $F_4=F_4(p)$.

Решая полученную систему, получаем $q_1(p)=\sqrt{p}$; $u_1(p)=1/\sqrt{p}$; $q_2(p)=\alpha^2/(4p)$; $u_2(p)=\alpha/\left(2\sqrt{\pi p^3}\right)$, откуда $G_1(p,\tau)=\mathrm{e}^{-\tau\sqrt{p}}/\sqrt{p}$; $G_2(p,\tau)=a\mathrm{e}^{-\tau\alpha/(4p)}/\left(2\sqrt{\pi p^3}\right)$, обратные преобразования которых $g_1(t,\tau)=\mathrm{e}^{-\tau^2/(4t)}/\sqrt{\pi t}$; $g_2(t,\tau)=\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{t\tau}}/\sqrt{\tau}$. Искомая функция будет $g(t,\tau)=g_1(t,\tau)+g_2(t,\tau)$, что совпадает с точным решением.

Вернемся к случаю, когда функцию $G(p,t)$ можно представить в виде $G(p,t)=\mathrm{e}^{-tq(p)}G(p)$. Выше было показано, что при этом функцию $g(t, \tau)$ можно восстановить по одному входному сигналу. Однако часто технически ее проще восстановить по двум входным сигналам.

Действительно,обозначим преобразования Лапласа функций $x(t)$ $f(t)$, соответственно $X(p)$ и $F(p)$. Будем полагать, что функции $q(p)$, $G(p)$ – аналитические при $p \geq \sigma_0$. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ – два линейно независимых входных сигнала. Тогда

$$\int_0^{\infty} g(t,\tau)x_i(\tau)d\tau = f_i(t),\ i = 1,2. \tag{23}$$

Изображение системы интегральных уравнений (23) по теореме Бореля приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} G(p)X_1(q(p)) = F_1(p); \\ G(p)X_2(q(p)) = F_2(p) \end{cases}$$

с неизвестными функциями $G(p)$ и $q(p)$ Решая эту систему относительно указанных функций, находим $G(p)$ и $q(p)$, а по формуле Бромвича определяем функцию

$$g(t,\tau) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma_0 - \mathrm{i}\infty}^{\sigma_0 + \mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{pt} G(p,\tau)dp.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части предыдущего равенства, могут применяться различные квадратурные формулы [13].

Таким образом, в работе описаны алгоритмы восстановления аппаратных функций систем с распределенными параметрами, основанные на применении преобразований Лапласа и Фурье к интегральным уравнениям первого рода. Аналогичные алгоритмы, основанные на применении других интегральных преобразований (в частности, преобразования Меллина), могут быть построены и для других классов интегральных уравнений, описывающих функционирование систем с распределенными параметрами.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Дейч А. М.** Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979.

2. **Грановский В. А.** Динамические измерения. Л.: Энергоатомизат, 1984.

3. **Техническая кибернетика**. Теория автоматического регулирования/ Под ред. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1967. Кн.1.

4. **Бутковский А. Г.** Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979.

5. **Бойков И. В.** Аналитические методы идентификации динамических систем. Пенза: Изд-во Пенз. политех. ин-та, 1992.

6. **Бойков И. В.** Об одном методе определения динамических характеристик при использовании реального испытательного сигнала //Измерительная техника. 1991. № 1. С. 9 – 10; **Boikov I. V.** A method for determination of dynamic characteristics with a real test signal //Measurement Techniques. 1991. V. 34. N 1.P. 12 – 15.

7. **Бойков И. В., Черушева Т. В.** Об одном методе определения динамических характеристик линейных систем // Измерительная техника. 1993. № 5. С. 13 – 16; **Boikov I. V., Cherusheva T. V.** Method for determining the dynamical characteristics of linear systems //Measurement Techniques. 1993. V. 36. N 5. P. 502 – 507.

8. **Бойков И. В**. Об идентификации нелинейных объектов // Измерительная техника. 1994. № 9. С. 12 – 14; **Boikov I. V.** Identification of nonlinear objects // Measurement Techniques. 1994. V. 37. N 9. P. 988 – 993.

9. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

10. **Егупов Н. Д., Пупков К. А., Баркин А. И.** Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 1. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления. М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.

11. **Бойков И. В., Кривулин Н. П.** Определение динамических характеристик измерительных преобразователей с распределенными параметрами //Измерительная техника. 2000. № 9. С. 29 – 32; **Boikov I. V. , Krivulin N. P.** Determination of the Dynamic Characteristics of Measuring Transducers with Distributed Parameters // Measurement Techniques. 2000. V. 43. N 9. P. 752 – 756.

12. **Эфрос А. М., Данилевский А. М.** Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1937.

13. **Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.** Численные методы. М.: Наука, 2009.

Дата принятия 28.11.2011 г.