

**МОДЕЛЬ ИНТЕГРИРОВАННОЙ НА ОСНОВЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ
ПРИНЦИПА Д'АЛАМБЕРА ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СПУТНИКОВО-
ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ**

А. С. ДЕВЯТИСИЛЬНЫЙ, К. А. ЧИСЛОВ

*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,
Владивосток, Россия, e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru*

Дано теоретико-механическое обоснование двухкомпонентного метода инерциальной навигации и приведены результаты численного исследования построенной на его базе модели гравиинерциальной навигационной системы.

Ключевые слова: инерциальная навигация, спутниковая навигационная система, гироскоп, ньютонометр, коррекция, гравиметрия, обратная задача, вейвлет.

The theoretical substantiation of two-dimensional inertial navigation method is given. The results of numerical research of 2D graviinertial navigation system are shown.

Key words: inertial navigation, satellite navigation system, gyroscope, newtonometer, correction, gravimetry, inverse problem, wavelet.

Объективный характер и высокая устойчивость результатов гравиметрической разведки делают ее важнейшей составной частью задач изучения земной коры, поиска нефти, газа, угля и других полезных ископаемых. Процесс гравиметрии условно можно разбить на три этапа [1]. На первом этапе решают задачи текущего и апостериорного оценивания локальных значений вектора напряженности гравитационного поля Земли (GE -поля) и их координатной привязки; на втором выполняют оценивание с высоты движения объекта-носителя на поверхность квазигеоида или референц-эллипсоида либо на физическую поверхность Земли, на третьем проводят геологическую интерпретацию массива полученных данных.

Возможность оперативного и детального охвата гравиметрическими наблюдениями больших и (или) труднодоступных районов, например арктических, появляется благодаря их реализации на подвижных объектах. В этом случае обе задачи – собственно гравиметрии и координатной привязки ее результатов – с учетом общности физических (теоретико-механических) представлений, лежащих в основе гравиметрии и инерциальной навигации, могут быть поставлены и решены в рамках единой обратной задачи. Эта задача по сути является моделью инерциальной навигационной системы (ИНС), функционирующей в условиях неполной гравитационной определенности и корректируемой по информации, доставляемой спутниковой навигационной системой (СНС), например типа ГЛОНАСС. Достаточно полно современное состояние обсуждаемой проблемы отражено в [2]. В [3] исследована модель гравиинерциальной системы, построенной на базе трехкомпонентной (по числу ньютонометров) 3D-ИНС.

Ниже рассмотрена гравиинерциальная навигационная система (ГИНС) на основе 2D-ИНС, переход к которой от схемы на базе 3D-ИНС осуществляют с использованием интерпретации принципа Д’Аламбера [4], что позволяет избежать каких-либо ограничений на движение объекта. Модель такой ГИНС отождествляют с моделью обратной задачи, представляемой в форме «состояние–измерение», исходно ориентированной на решение методом динамического обращения (МДО) [5] с применением алгоритма калмановского типа [6]. При этом учитывают, что образующие инструментальную составляющую ГИНС инерциальные измерители (гироскопы и ньютонометры) так же, как и СНС, обладают погрешностями стохастического характера, что требует дополнительной апостериорной обработки результатов динамического обращения. Для этой цели предлагаем использовать вейвлет-технологии, ранее хорошо себя зарекомендовавшие [7].

Основные модельные представления. В качестве исходных будем рассматривать уравнения идеальной работы автономной 3D-ИНС в проекциях на оси ортогонального координатного трехгранника $ou = ou_1, u_2, u_3$, вращающегося с абсолютной угловой скоростью $\omega = (\omega_i)$, $i = \overline{1, 3}$ [8]:

$$Dq = p; \quad q(0) = q_0; \quad (1)$$

$$Dp = G + F; \quad p(0) = p_0; \quad (2)$$

$$DA = 0; \quad A(0) = A_0, \quad (3)$$

где $\mathbf{D} = (D_{ij})$ – оператор абсолютного дифференцирования; $D_{ij} = d/dt - e_{ikj} \omega_k$, e_{ikj} – псевдотензор Леви–Чивита; $\mathbf{q} = (q_i)$, $\mathbf{p} = (p_i)$, $\mathbf{G} = (G_i)$, $\mathbf{F} = (F_i)$ – соответственно радиус-вектор положения объекта (отождествляемого с материальной точкой $\tilde{o}$ единичной массы), векторы удельных импульсов (в данном случае – вектор абсолютной линейной скорости точки $\tilde{o}$), напряженности GE -поля и удельных сил негравитационной природы; $\mathbf{A} = (A_{ij})$ – матрица ориентации трехгранника ou относительно инерциальной системы отсчета.

Векторные уравнения (1), (2) составляют динамическую группу уравнений (ДГУ) 3D-ИНС; матричное (3) – кинематическое уравнение Пуассона. Здесь и далее действует правило суммирования по повторяющимся индексам.

Примем, что начало (o) трехгранника ou находится в центре масс Земли, а инерциальные измерения $\mathbf{F}$ и $\boldsymbol{\omega}$ проводятся в приборном трехграннике $\tilde{o}u = \tilde{o}u_1u_2u_3$ с началом в точке $\tilde{o}$, расположенной на оси ou_3 . Оси $(\tilde{o}u_1, \tilde{o}u_2, \tilde{o}u_3)$ параллельны соответствующим осям трехгранника ou , причем $\tilde{o}u_1$ и $\tilde{o}u_2$ направлены на географические Восток и Север.

Если речь идет о математической постановке задачи коррекции ИНС в форме модели обратной задачи, то необходима дополнительная (неинерциальная) информация. Предполагаем, что она доставляется СНС, является полной позиционной и представляется измерениями модуля радиуса-вектора $|\mathbf{q}| = q_3 = r$, широты φ и долготы λ в геоцентрической системе координат, так что

$$J_r = r + \varepsilon; \quad J_\varphi = \varphi + \varepsilon_\varphi; \quad J_\lambda = \lambda + \varepsilon_\lambda, \quad (4)$$

где $(J_r, J_\varphi, J_\lambda)^T$, $(\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\lambda)^T$ – соответственно векторы измерений и их инструментальных погрешностей.

Уравнения (1) – (4) составляют модель общей («в большом») обратной задачи, цель которой – определение координат и скоростей объекта, а также его пространственной ориентации как твердого тела. При этом моделирование уравнений (1) – (3) с учетом измеренных значений $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{F}$, т. е. реализация автономного режима работы ИНС, дает возможность иметь опорные $(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{A}})$ значения $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{A}$ с последующей постановкой обратной задачи «в малом», которую будем обсуждать далее.

При измерениях F_i , ω_i и q_3 обычно реализуется процедура динамического сглаживания (режим отслеживания параметра), тогда можно считать, что в конечном итоге доступными являются не только их сгла-

женные оценки $\tilde{F}_i$, $\tilde{\omega}_i$ и $\tilde{q}_3$, но и производные, в частности, $\dot{\omega}_i$, $\dot{q}_3$, $\ddot{q}_3$. Примем $\tilde{q}_3 = J$; $\tilde{q}_3 = \dot{q}_3 + \varepsilon_1$; $\tilde{\ddot{q}}_3 = \ddot{q}_3 + \varepsilon_2$; $\tilde{F}_i = F_i + f_i$; $\tilde{\omega}_i = \omega_i + v_i$; $\tilde{\dot{\omega}}_i = \dot{\omega}_i + \Delta_i$, где ε_1 , ε_2 , f_i , v_i , Δ_i – инструментальные погрешности. Тогда возможно при построении опорного решения ДГУ ограничиться моделированием только первых четырех уравнений ($i = \overline{1, 2}$), т. е. перейти, по сути, к схеме 2D-ИНС, в которой модельные значения переменных q_3 , p_3 ($p_3 = \dot{q}_3 + \omega_2 q_1 - \omega_1 q_2$), а также напряженности GE -поля формируются с учетом значений сглаженных оценок $\tilde{q}_3$, $\tilde{\ddot{q}}_3$. Вместе с тем, в силу того, что при таком моделировании не вычисляется опорное значение q_3 , построение невязки измерения $\delta J_r = \delta q_3 + \varepsilon$ и постановка задачи коррекции как обратной задачи «в малом» в форме, например [9], теперь уже невозможны.

Однако возможен другой путь. Обратимся к принципу Д’Аламбера: «если в какое-либо мгновение к физическим силам, действующим на данную механическую совокупность (или любую ее часть), присоединить все относящиеся к ней даламберовы силы инерции, то образуется система сил, статически эквивалентная нулю» [4]. Актуализируя этот принцип на оси Oy_3 , имеем

$$J_d = \dot{p}_3 - \omega_2 p_1 + \omega_1 p_2 - G_3 - F_3 = 0,$$

или

$$\begin{aligned} J_d = \ddot{q}_3 - (\dot{\omega}_2 + \omega_3^2)q_1 - (\omega_2\omega_3 - \dot{\omega}_1)q_2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)q_3 - \\ - 2\omega_2 p_1 + 2\omega_1 p_2 - G_3 - F_3 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановка в (5) значений переменных, доступных благодаря измерениям и моделированию ДГУ в режиме 2D-ИНС ($i = \overline{1, 2}$), приводит к невязке $\delta J_d \neq 0$, содержащей информацию о погрешностях моделирования, которая может быть использована при постановке обратной задачи «в малом» для оценки значений этих погрешностей. Модель такой ограниченной задачи принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{q}_i &= -e_{ikj} \omega_k \delta q_j + \delta p_i - e_{ikj} v_k q_j; \quad \delta q_i(0) = \delta q_{i,0}; \\ \delta \dot{p}_i &= -e_{ikj} \omega_k \delta p_j + \delta G_i(r, \mathbf{q}) + f_i - e_{ikj} v_k p_j; \quad \delta p_i(0) = \delta p_{i,0}; \\ \delta J_d &= (\dot{\omega}_2 + \omega_3^2) \delta q_1 - (\omega_2 \omega_3 - \dot{\omega}_1) \delta q_2 + 2\omega_2 \delta p_1 - 2\omega_1 \delta p_2 + \\ &+ \delta G_3(r, \mathbf{q}) - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \varepsilon + \varepsilon_2 + f_3; \quad i = \overline{1, 2}; \quad j, k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $\delta G_i(r, \mathbf{q}) = g_i + \frac{\partial G_i(r, \mathbf{q})}{\partial r} \delta r + \frac{\partial G_i(r, \mathbf{q})}{\partial q_j} \delta q_j$; $\mathbf{g} = (g_i)$ ($i=1,2,3$) – вектор аномалии GE -поля в текущей точке траектории; $q_1 = q_2 = 0$; $q_3 = r$; $p_1 = \omega_2 q_3$; $p_2 = -\omega_1 q_3$; $p_3 = \dot{q}_3$; $\delta q_3 = \delta r = \varepsilon$; $\delta p_3 = \varepsilon_1 - \omega_2 \delta q_1 + \omega_1 \delta q_2$.

В предположении, что значения вертикальной компоненты аномалии g_3 существенно преобладают над горизонтальными g_1 и g_2 , выполним расширение вектора состояния системы (6) только включением в него g_3 с одновременным учетом уравнения эволюции g_3 (в частности, $-\dot{g}_3 = 0$). Это позволяет найти оценку g_3 и решить задачу уточнения модели GE -поля на заданной траектории и оценки углов наклона приборной плоскости $\tilde{y}_1, y_2$. При этом качество оценки g_3 будет тем выше, чем менее изменчиво g_3 на временном интервале наблюдения по сравнению с изменчивостью погрешностей ε , ε_2, f_3 . Отметим, что f_3 может быть погрешностью вертикального ньютонометра (его роль может исполнять и высокоточный гравиметр) или погрешностью априорных представлений о силе F_3 , формируемых при организации программных траекторий для объекта-носителя. В обоих случаях возможно еще одно дополнительное расширение вектора состояния задачи из-за включения в него кроме g_3 еще и f_3 . При этом желательно, чтобы характеры эволюции g_3 и f_3 были отличны.

Согласно методологии [8] полную модель обратной задачи «в малом», соответствующую модели (1) – (3), можно записать в виде системы

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{q}_i &= -e_{ikj} \omega_k \delta q_j + \delta p_i - e_{ikj} v_k q_j; & \delta q_i(0) &= \delta q_{i,0}; \\ \delta \dot{p}_i &= -e_{ikj} \omega_k \delta p_j - \delta G_i(r, \mathbf{q}) + f_i - e_{ikj} v_k p_j; & \delta p_i(0) &= \delta p_{i,0}; \\ \dot{\beta}_m &= -e_{mkj} \omega_k \beta_j + v_m; & \beta_m(0) &= \beta_{m,0}; \\ \dot{f}_3 &= -\lambda_{f_3} f_3 + \sqrt{2\lambda_{f_3}} \sigma_{f_3} w; & f_3(0) &= f_{3,0}; \\ \dot{g}_3 &= 0; & g(0) &= g_0; \\ \delta J_d &= (\dot{\omega}_2 + \omega_3^2) \delta q_1 - (\omega_2 \omega_3 - \dot{\omega}_1) \delta q_2 + 2\omega_2 \delta p_1 + \delta G_3(r, \mathbf{q}) - \\ &- (\omega_1^2 + \omega_2^2) \varepsilon + \varepsilon_2 + f_3; \\ \delta J_\varphi &= \varphi_{\text{инс}} - \varphi_{\text{снс}} = \delta q_2 / r - \beta_1 + \varepsilon_\varphi; \\ \delta J_\lambda &= (\lambda_{\text{инс}} - \lambda_{\text{снс}}) \cos \varphi = -\delta q_1 / r - \beta_2 + \varepsilon_\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь $(\varphi_{\text{инс}}, \lambda_{\text{инс}})$, $(\varphi_{\text{снс}}, \lambda_{\text{снс}})$ – соответственно ИНС- и СНС-определения значений φ, λ ; $\beta = (\beta_m)$, $m = \overline{1, 3}$ – вектор малого угла рассогласования расчетного (модельного) и приборного координатных трехгранников. Инструментальные погрешности гироскопов v_i , $i = \overline{1, 3}$, планарных ньютонометров f_i , $i = \overline{1, 2}$, СНС-определений $\varepsilon, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\lambda$ и оценки ε_2 значения $\ddot{r}$ представляют несмещенными белыми шумами с нулевыми средними и интенсивностями $\sigma_v^2, \sigma_f^2, \sigma_{\varepsilon_\varphi}^2, \sigma_{\varepsilon_\lambda}^2, \sigma_{\varepsilon}^2, \sigma_{\varepsilon_2}^2$, а погрешности гравиметра (вертикального ньютонометра) – несмещенным марковским процессом с параметрами сноса λ_{f_3} и диффузии σ_{f_3} . Углы, характеризующие отклонение плоскости $\tilde{y}_1 y_2$ приборного трехгранника от горизонта, определяются как $\alpha_1 = \delta q_2 / r$, $\alpha_2 = -\delta q_1 / r$.

Вычислительные эксперименты. В проведенных численных исследованиях задачи (7) предполагали, что модельное GE -поле является центральным, а при формировании вектора $\mathbf{G}(r, \mathbf{q})$ использованы измеренные значения $r = |\mathbf{q}|$, так что $\delta G_i(r, \mathbf{q}) = -\omega_0^2 \delta q_i + g_i$, $i = \overline{1, 2}$; $\delta G_3 = g_3 - 2\omega_0^2 \varepsilon$, где $\omega_0^2 = \mu / r^3$ – частота Шулера. При имитационном моделировании возмущающие функции имели вид $g_1(t) = g_0 \sin(2\pi vt/L)$, $g_2(t) = g_0 \cos(2\pi vt/L)$, где L – пространственный период изменения g_1, g_2 ; v – линейная скорость объекта относительно Земли.

Учитывая представление модели ГИНС в виде «состояние–измерение», при численном решении задачи (7) применяли алгоритм калмановской фильтрации.

На рис. 1, 2 приведены некоторые результаты одного эксперимента, причем на рис. 2 представлены и результаты апостериорной обработки с использованием вейвлет-технологий [7, 10]. Здесь $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\varphi, \Delta\lambda$ – погрешности калмановского оценивания величин $\alpha_1, \alpha_2, \varphi, \lambda$.

Предполагаем, что объект движется в восточном направлении на широте $\varphi = 45^\circ$ со скоростью $v = 30$ м/с, причем в радиальном направлении ускорение его движения описывается как $\ddot{r} = A(2\pi/T)^2 \sin(2\pi t/T)$, где $A = 10$ м, $T = 20\pi$ с, и оценивается с погрешностью, имеющей нулевое среднее и среднее квадратическое отклонение (СКО) $\sigma_{\varepsilon_2} = 5 \cdot 10^{-4}$ м/с² при исходном СКО измерения $r(t)$ $\sigma_\varepsilon = 1$ м. Погрешности $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\lambda$ также имеют нулевые средние и СКО $\sigma_\varphi = \sigma_\lambda = 1,5 \cdot 10^{-6}$ рад или $\sigma_\varphi = \sigma_\lambda = 10$ м. Инструментальные погрешности ньютонометров и гироскопов представляют несмещенными относительно нуля нормальными белыми шумами с СКО $\sigma_{v_i} = 0,001$ °/ч $\approx 5 \cdot 10^{-9}$ с⁻¹; $\sigma_{f_1} = \sigma_{f_2} =$

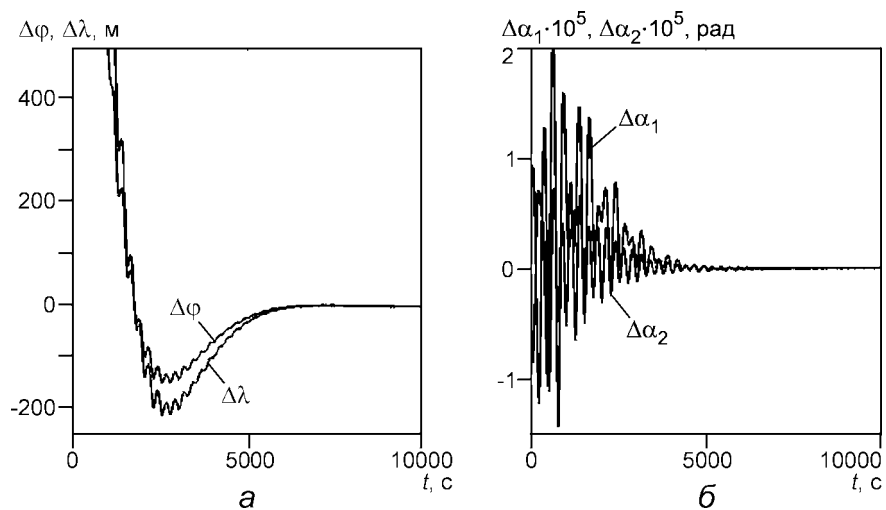


Рис. 1. Эволюции погрешностей оценивания координат объекта (а) и углов горизонтирования платформы (б)

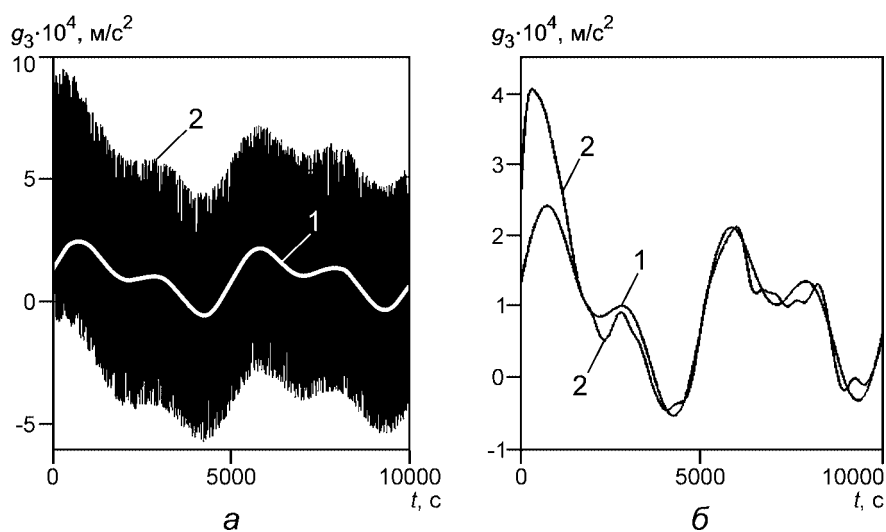


Рис. 2. Эволюции оценок функции $g_3(t)$:

1 – истинная функция; 2 – ее калмановская (а) и вейвлет-оценки (б)

$= 0,001 \text{ м/с}^2$; $\sigma_{f_3} = 10^{-6} \text{ м/с}^2$; $g_0 = 10^{-6} \text{ м/с}^2$; $L = 50000 \text{ м}$. При этом $\sigma_{\varepsilon_2} \gg \sigma_{f_3}$.

Из рис. 1, 2 можно сделать выводы как о достаточной сходимости решений, что является прямым следствием корректности математической постановки задачи, так и вполне удовлетворительной точности определения параметров траектории движения объекта, углов горизонтирования приборной платформы и значения аномалии GE -поля, причем в последнем случае особо важное значение приобретает апостериорная обработка результатов динамического обращения.

Таким образом, предложенная интерпретация модели 2D-ГИНС может быть вполне успешно использована при решении задачи навигации и гравиметрии. Как показали численные исследования, это непосредственно связано с возможностями высокоточного оценивания второй производной радиуса-вектора положения объекта.

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ-ДВО (грант № 09-01-98503-р_восток_a) и ДВО РАН (гранты №№ 09-1-П29-02, 09-III-A-03-066).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Гравиразведка:** Справочник геофизика /Под ред. Е. А. Мудрецовой. М.: Недра, 1981.
2. **Голован А. А., Болотин Ю. В., Парусников Н. А.** Методы решения задачи авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний //Проблемы механики: К 90-летию А. Ю. Ишлинского. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. С. 130 – 145.
3. **Девятисильный А. С., Числов К. А.** Гравиметрическая трехкомпонентная инерциальная система //Измерительная техника. 2009. № 8. С. 15 – 17; **Devyatisil'nyi A. S., Chislov K. A.** A three-component inertial gravimetric system //Measurement Techniques. 2009. V. 52. N 8. P. 795 – 798.
4. **Ишлинский А. Ю.** Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987.
5. **Осипов Ю. С., Кряжмский А. В.** Задачи динамического обращения // Вестник РАН. 2006. Т. 76. С. 615 – 624.
6. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
7. **Девятисильный А. С., Дорожко В. М., Числов К. А.** Гравиметрическая интерпретация трехкомпонентного метода инерциальной навигации // Авиакосмическое приборостроение. 2009. № 6. С. 8 – 11.

8. **Андреев В. Д.** Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967.

9. **Девятисильный А. С., Числов К. А.** Численное моделирование задачи коррекции трехкомпонентной инерциальной навигационной системы по высотной информации. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 101 – 105.

10. **Дьяконов В. П.** Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002.

Дата принятия 04.10.2010 г.

