

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ВЕКТОРОВ СОВМЕСТНО ДЕЙСТВУЮЩИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ИХ ДИСКРЕТИЗАЦИИ И СУММИРОВАНИЯ ДИСКРЕТ

Ю. Р. АГАМАЛОВ

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,
Москва, Россия, e-mail: agamalov@ipu.rssi.ru

Рассмотрен метод быстрого раздельного измерения векторов совместно действующих гармонических сигналов с помощью их особой частотозависимой дискретизации и суммирования дискрет. Представлено теоретическое обоснование метода, обсуждены погрешности измерения и возможности его технической реализации.

Ключевые слова: векторы совместно действующих гармонических сигналов, частотозависимая дискретизация, суммирование дискрет.

The rapid method of separate measurements of jointly acting harmonic signals vectors their special frequency-dependent discretization and using discretes summation is considered. The theoretical justification of the method is carried out, the measurement errors and the possibilities of its technical realization are discussed.

Key words: vectors of jointly acting harmonic signals, frequency-dependent discretization, discretes summation.

Задача быстрого раздельного измерения векторов совместно действующих гармонических сигналов имеет особую важность при исследованиях динамики процессов, источником информации о которых являются параметры многоэлементных двухполюсников, а также при выполнении измерений на переменном токе в условиях действия нескольких источников помех: гармонических и знакопеременных периодических сигналов с совпадающими по форме полупериодами.

Предлагаемый метод, идея которого описана в [1, 2], имеет ряд преимуществ перед известными подходами к решению подобных задач.

Основанные, главным образом, на использовании аналоговых фильтров [3] и временных окон [4], эти подходы обладают или невысокими точностью измерения и быстродействием, или (и) сложностью реализации. В отличие от них рассматриваемый метод обеспечивает очень высокое быстродействие при небольших погрешностях измерений и достаточно простой реализации.

Анализ метода проводится в общем виде за исключением важного частного случая сигналов с кратными значениями частот, который в силу своей специфики требует особого рассмотрения, выходящего за рамки данной статьи.

Ниже представлены особенности и теоретическое обоснование метода, обсуждены точность измерений и возможности его технической реализации.

Общая характеристика метода. Метод основан на особым образом организованной дискретизации совместно действующих (суммарных) периодических сигналов

$$\sigma(t) = \sum_{m=1}^M S_m(t),$$

где M – число сигналов; $S_m(t) = S_m(t - T_m)$ – знакопеременные периодические сигналы с совпадающими по форме полупериодами, т. е. $S_m(t) = -S_m(t - T_m/2)$, включая гармонические

$$S_m(t) = A_m \sin(2\pi t / T_m + \varphi_{0m}),$$

к которым относится измеряемый сигнал с номером j .

Специфика применяемой дискретизации заключается в том, что она неравномерна и адаптирована к частотам входящих в состав $\sigma(t)$ сигналов. Благодаря особой расстановке дискрет можно, как будет показано далее, осуществлять селекцию измеряемого сигнала $S_j(t)$, $j \in \overline{1, M}$, и при этом путем прямых измерений (с точностью до нормирующего множителя K_j) получать значения его проекций p'_j , p''_j на оси прямоугольной системы координат. В качестве осей этой системы выступают ортогональные опорные гармонические сигналы в виде сумм Σ'_d , Σ''_d дискрет сигнала $\sigma(t)$:

$$p'_j = K_j \sum_{i=1}^N \sigma(t'_i) = K_j \Sigma'_d; \quad p''_j = K_j \sum_{i=1}^N \sigma(t''_i) = K_j \Sigma''_d, \quad (1)$$

где $t_i'' = t_i' + (2n+1)T_j/4$, что адекватно углу между осями координат, равному в радианах $\pi/2$; N – число дискрет; n – целое число.

Значения амплитуды A_j и фазы φ_{0j} получают путем вычислений по формулам, связывающим модуль и угол вектора с его проекциями на оси декартовой прямоугольной системы координат:

$$A_j = [(p_j')^2 + (p_j'')^2]^{1/2}; \quad \varphi_{0j} = \arctg(p_j' / p_j''). \quad (2)$$

В результате с учетом (1) и (2) расчетные соотношения для амплитуды и фазового сдвига принимают вид

$$A_j = K_j [(\Sigma_d')^2 + (\Sigma_d'')^2]^{1/2}; \quad \varphi_{0j} = \arctg(\Sigma_d' / \Sigma_d''). \quad (3)$$

Получение и обработка измерительной информации. Рассмотрим алгоритм отбора измерительной информации, т. е. организацию процедуры выборки дискрет, и ее математическую обработку.

Алгоритм дискретизации сигналов. Для алгоритма формирования множества моментов времени выборки дискрет ограничимся множеством $\{t_i'\} = \{t_i\}_j$, так как множество $\{t_i''\}_j$ получают путем сдвига $\{t_i'\}_j$ по времени на $(2n+1)T_j/4$.

Алгоритм проиллюстрирован рис. 1, где кроме моментов времени выборки дискрет показаны также стробирующие импульсы, осуществляющие их выборку. Он представляет собой пошаговую процедуру, начинающуюся с «нулевого» шага ($m = 0$) – фиксации исходного (единичного) множества моментов времени, состоящего из произвольного начального момента t_1 , который с учетом инвариантности модуля вектора к сдвигу системы координат и без потери общности результата принят равным нулю.

Первый шаг ($m = 1$) согласно рис. 1 заключается в получении дополнительного множества, содержащего тоже один момент t_2 , путем сдвига исходного множества на интервал времени τ_1 , равный нечетному числу полупериодов первого сигнала.

На втором шаге ($m = 2$) дополнительное множество, состоящее уже из двух моментов t_3 и t_4 , образуется вследствие сдвига полученного на первом шаге множества из двух моментов t_1 и t_2 на интервал времени τ_2 , равный нечетному числу полупериодов второго сигнала и т. д.

Иначе говоря, эта процедура продолжается с образованием на каждом m -м шаге дополнительного множества сдвигом суммарного множества, сформированного на $(m-1)$ -м шаге, на нечетное число n_m полупериодов

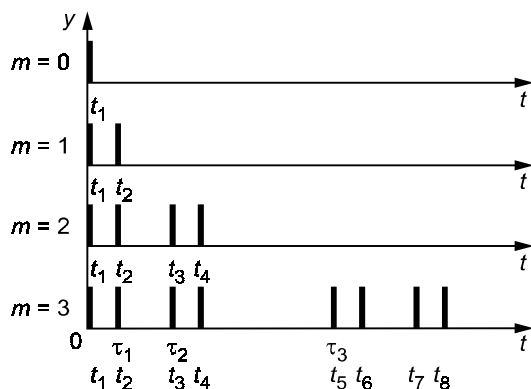


Рис. 1. Алгоритм формирования множества моментов времени выборки дискрет

m -го сигнала до тех пор, пока число шагов не станет равным $M - 1$ (в случае, представленном на рис. 1, $M = 4$). При этом число моментов времени N выборки дискрет сигнала $\sigma(t)$ с каждым шагом удваивается и на $(M - 1)$ -м шаге становится равным $N = 2^{M-1}$.

Покажем, что результатом применения такой процедуры является множество моментов времени выборки дискрет $\{t_i\}$, обладающее свойством селекции $S_j(t)$ и позволяющее измерять его амплитуду A_j и фазовый сдвиг ϕ_{0j} суммированием полученных на этом множестве дискрет и вычислением значений данных параметров по (3). Для этого будем рассматривать алгоритм выборки дискрет как процедуру подавления сигналов $S_m(t)$, сопутствующих измеряемому.

Заметим, что нумерация сигналов может быть произвольной, но для большей наглядности (см. рис. 1) они пронумерованы в порядке убывания частот.

Критерием подавления сигналов является равенство нулю сумм их дискрет, получаемых пошагово на множествах $\{t_i^{(k)}\}$, где k – номер шага. Так на первом шаге ($m = 1$) реализуется подавление сигнала с периодом T_1 , поскольку очевидно, что если две дискреты знакопеременного периодического сигнала с одинаковыми по форме полупериодами сформированы в моменты времени, сдвинутые друг относительно друга на нечетное число полупериодов этого сигнала, то их сумма будет равна нулю.

На втором шаге ($m = 2$) подавляются уже два сигнала с периодами T_1 и T_2 . Чтобы удостовериться в этом, подставим значения моментов

времени выборки дискрет $t_1, \dots, t_4$ в математические выражения сигналов $S_1(t) = A_1 \sin(2\pi t/T_1 + \varphi_{01})$; $S_2(t) = A_2 \sin(2\pi t/T_2 + \varphi_{02})$, приняв для упрощения $n_1 = n_2 = 1$. Просуммировав дискреты, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{2^2} A_1 \sin(2\pi t_i / T_1) = A_1 [\sin 0 + \sin(2\pi T_1 / 2T_1) + \\ + \sin(2\pi T_2 / 2T_1) + \sin(2\pi(T_2 / 2 + T_1 / 2) / T_1)] = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{2^2} A_2 \sin(2\pi t_i / T_2) = A_2 [\sin 0 + \sin(2\pi T_1 / 2T_2) + \\ + \sin(2\pi T_2 / 2T_2) + \sin(2\pi(T_2 / 2 + T_1 / 2) / T_2)] = 0,$$

т. е. суммы дискрет сигналов с периодами T_1, T_2 равны нулю, что свидетельствует об их подавлении.

Образованное на третьем шаге ($m=3$) множество составлено из двух множеств, полученных на втором шаге и сдвинутых друг относительно друга на $\tau_3 = n_3 T_3 / 2$, где n_3 – нечетное число. Это множество позволяет подавить сигналы с периодами T_1, T_2, T_3 , в чем можно убедиться, если подставить моменты времени $t_1, \dots, t_8$ в выражения для сигналов $S_1(t), S_2(t)$ и $S_3(t)$ аналогично случаю $m=2$.

Докажем теперь в общем виде, что данная процедура позволяет сформировать множество дискрет, подавляющее все сигналы, кроме измеряемого, и в этом смысле к нему инвариантное. Применим метод математической индукции с учетом приведенных выше рассуждений, строго подтверждающих сделанное утверждение для первых двух шагов.

Для этого примем, что справедливо утверждение о подавлении на k -м шаге сигналов с номерами от 1 до k . Тогда останется доказать его справедливость для $(k+1)$ -го шага, исходным для которого будет некоторое множество моментов времени выборки дискрет $\{t_i^{(k)}\}$, сформированное на k -м шаге. Пусть дополнительное множество $\{t_i^{(k)}\}^*$ образовано сдвигом исходного на интервал времени $\tau_k = n_k T_k / 2$, где n_k – нечетное число. Это множество тоже будет обладать свойством подавления первых k сигналов, а в сумме с множеством, полученным на k -м шаге, позволит подавлять и $(k+1)$ -й сигнал, поскольку для каждой дискреты из $\{t_i^{(k)}\}$

найдется парная дискрета из $\{t_i^{(k)}\}^*$, сдвинутая относительно нее на τ_k , и, следовательно, имеющая противоположный знак. При этом иных пар дискрет не будет вследствие равенства чисел дискрет этих множеств.

Таким образом, множество дискрет, образованное на $(M-1)$ -м шаге, обеспечивает подавление всех сигналов, сопутствующих измеряемому, что и требовалось доказать, а число входящих в него дискрет равно 2^{M-1} .

Заметим лишь, что окончательное множество позволяет подавить $K=M-1$ сигналов с периодами $T_1, \dots, T_k, \dots, T_K$, где T_k – период сигнала с номером M , если $j < M$, или с номером $M-1$, если $j=M$.

Математическое выражение для полученного множества моментов времени выборки дискрет следует непосредственно из его пошаговой процедуры формирования в соответствии с рис. 1 и с учетом условия $m=0 \Rightarrow t_1=0$ имеет вид

$$\begin{aligned} t_1 &= 0; t_2 = t_1 + n_1 T_1/2; t_3 = t_1 + n_2 T_2/2; t_4 = t_2 + n_2 T_2/2; t_5 = t_1 + n_3 T_3/2; \\ t_6 &= t_2 + n_3 T_3/2; t_7 = t_3 + n_3 T_3/2; t_8 = t_4 + n_3 T_3/2; \dots, t_{2^m} = t_{2^{m-1}} + n_m T_m/2; \\ t_{2^{m+1}} &= t_1 + n_{m+1} T_{m+1}/2; \dots, i = \overline{1, 2^{M-1}}; m = \overline{0, M-1}. \end{aligned}$$

Математическая обработка дискрет. Для применения математических выражений (3) при расчете измеряемых параметров необходимо вывести математическое выражение для коэффициента K_j . С этой целью воспользуемся изображенной на рис. 2 векторной моделью суммирования дискрет гармонических сигналов и преобразуем форму представления сигнала $S_j(t)$ к удобному для анализа виду. Будем полагать $A_j=1$ и $\varphi_{0j}=0$ с учетом инвариантности модуля вектора сигнала $S_j(t)$ по отношению к фазовому сдвигу φ_{0j} и того, что K_j является нормирующим множителем.

Поскольку процедура формирования $\{t_{ij}\}$ одинакова для всех сигналов, опустим везде индекс j . Тогда будем иметь $S_j(t) \Rightarrow S(t)$, $\{t_{ij}\} \Rightarrow \{t_i\}$, $i \in \overline{1, N=2^{M-1}}$, $K_j \Rightarrow K$, $T_j \Rightarrow T$ и $\omega_j \Rightarrow \omega$. Кроме того, с учетом периодичности $S(t)$ преобразуем множество $\{t_i\}$ в $\{[t_i]\}$, где $[t_i]$ – дробная часть от деления t_i на $T = 2\pi/\omega$, благодаря чему моменты времени t_i выборки дискрет сигнала $S_j(t)$ будут соответствовать одному периоду синусоиды $S(t) = \sin(2\pi t/T) = \sin(\omega t)$.

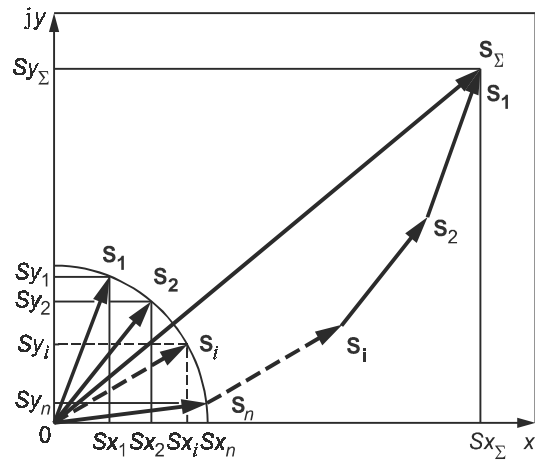


Рис. 2. Векторная модель суммирования дискрет гармонического сигнала

В результате множество дискрет $\{S_i = S(t_i)\}$ будет приведено к одному периоду синусоиды $S(t)$, а множество фазовых углов $\{\varphi(t_i) = \omega t_i\}$ – к четырем квадрантам прямоугольной декартовой системы координат (на рис. 2 для большей наглядности оно приведено к первому квадранту).

Суммирование дискрет выполняют согласно формуле Эйлера

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t).$$

Здесь $e^{j\omega t}$ представляет собой комплексное число, которое в полярной системе координат выступает как единичный вектор $\mathbf{S} = e^{j\omega t}$, а дискреты S_i – как проекции вектора $\mathbf{S}_i = e^{j\omega t_i}$ на оси комплексной плоскости (x, jy) : $Sy_i = \text{Im } e^{j\omega t_i}$ или $Sx_i = \text{Re } e^{j\omega t_i}$. Операции с векторами $\mathbf{S}_i = e^{j\omega t_i}$, с их проекциями Sx_i, Sy_i и суммой $\mathbf{S}_\Sigma = K e^{j\omega t_\Sigma}$ выполняют по правилам векторной алгебры. Поскольку принято, что $A_j = 1$, в соответствии с (3) получаем

$$K \left[\left(\sum_{i=1}^N \sin(\omega t_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \cos(\omega t_i) \right)^2 \right]^{1/2} = 1.$$

Таким образом, с учетом $N=2^{M-1}$ имеем

$$K_j = K = \left[\left(\sum_{i=1}^{2^{M-1}} \sin(\omega t_i) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2^{M-1}} \cos(\omega t_i) \right)^2 \right]^{-1/2},$$

при этом условием селекции $S_j(t)$ будет неравенство $K_j > 0$.

Итак, все соотношения между параметрами сигнала $S(t)$ и суммами дискрет определены. Из проведенного анализа следует важный вывод об эквивалентности суммы дискрет одной дискрете. В данном случае (согласно рис. 2) – это эквивалентность Sx_Σ и Sy_Σ соответствующим суммам Sx_i и Sy_i .

Анализ погрешностей измерений. Возникающие при реализации метода погрешности настолько сильно зависят от специфики решаемой измерительной задачи, что здесь имеет смысл рассматривать методические погрешности, которые от этой специфики не зависят. К ним относятся погрешности расстановки дискрет на оси времени, имеющие аддитивный характер. Например, если измеряется пассивная электрическая величина (тот или иной параметр иммитанса), а погрешность мультипликативна, то она не будет влиять на точность конечного результата измерения.

Погрешности расстановки дискрет, в свою очередь, зависят от точности информации о частотах сигналов, а также от частоты (импульсного) тактового генератора, задающего размер квантов времени и, следовательно, погрешность квантования временных интервалов.

Если значение частоты подавляемого сигнала известно с относительной погрешностью δf_m , то абсолютная погрешность, вносимая этим сигналом, определяется как $\Delta S_m = A_m \sin(\pi \delta f_m)$, абсолютная погрешность квантования временных интервалов – как $\Delta S_m^* = A_m \sin(2\pi f_m T_k)$, а суммарная погрешность – как

$$\Delta S_{m\Sigma} = A_m \sin \left[\pi (\delta f_m \pm 2 f_m T_k) \right].$$

В целом погрешности измерения, возникающие при реализации метода, минимальны на низких и инфранизких частотах и в значительной степени зависят от частотных погрешностей применяемой аппаратуры (возрастают пропорционально частоте измеряемого сигнала). Следует отметить, что погрешности квантования дискрет уменьшаются с ростом частоты тактового генератора, а благодаря суммированию дискрет нивелируются (как шум квантования) тем больше, чем больше

общее число сигналов и соответственно дискрет. Последнее относится и к случайным погрешностям.

Возможности технической реализации метода. Она прежде всего связана с использованием того или иного вычислительного средства – специализированного или универсального, в частности персонального компьютера (ПК). В состав реализующего метод средства измерений (СИ) обязательно должно входить устройство дискретизации сигналов (УДС), в качестве которого в простейшем случае может выступать быстродействующий АЦП, и, очевидно, требуется устройство, формирующее импульсы выборки дискрет, с высокочастотным импульсным тактовым генератором. Наличие и структура остальных узлов зависят от конкретной измерительной задачи.

Обобщенная структурная схема такого СИ приведена на рис. 3, где основные узлы, необходимые во всех случаях реализации метода, показаны сплошными линиями, кроме них в состав входят исследуемая (в том числе измерительная) цепь *ИЦ* и генератор гармонических сигналов *Г*.

В случае достаточно низких частот измеряемых сигналов все функции управления и цифровой обработки дискрет может осуществлять ПК, так что реализация метода выльется практически в выбор типа и структуры УДС и простейшего интерфейсного адаптера, а также в разработку несложного программного обеспечения. Когда измеряемые сигналы находятся в диапазоне высоких частот, обеспечивается высокое

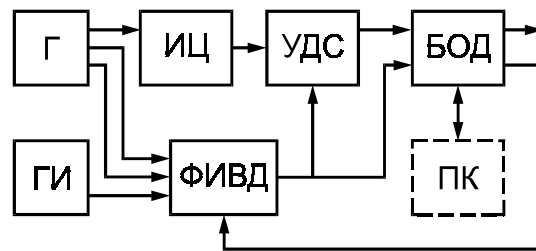


Рис. 3. Обобщенная структурная схема реализующего метод средства измерений:

Г – генератор гармонических сигналов; *ИЦ* – исследуемая (измерительная) цепь; *УДС* – устройство дискретизации сигналов; *БОД* – блок математической обработки дискрет; *ГИ* – генератор тактовых импульсов; *ФИВД* – формирователь импульсов выборки дискрет; *ПК* – персональный компьютер

быстродействие. В этом случае необходимо специализированное вычислительное средство, входящее в состав устройства обработки дискрет УОД (см. рис. 3)

Добавим, что реализация метода возможна с использованием и аналоговых, и дискретных аппаратных средств.

В заключение отметим, что предложенный метод обеспечивает исключительно высокое быстродействие, так как измерения можно выполнять в реальном масштабе времени, и достаточно прост в реализации. Сфера его применений распространяется как на измерения сложных объектов исследования, в том числе с частотозависимыми параметрами, так и на точные измерения при низком и к тому же изменяющемся уровне отношения сигнал–помеха. Здесь существенно, что можно измерять амплитуды таких помех и тем самым уточнять оценки вносимых при этом погрешностей. Особо необходимо отметить, что данный метод является предпосылкой, как это было указано в [2], для реализации аддитивного дискретного преобразования Фурье, осуществляемого с помощью только арифметических операций сложения без применения операций умножения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Пат. 2377577 РФ. Способ измерения вектора гармонического сигнала / Ю. Р. Агамалов //Изобретения. Полезные модели. 2009. № 26.
2. Агамалов Ю. Р. Способ раздельного преобразования совместно действующих гармонических сигналов //Проблемы автоматизации и управления в технических системах: Труды Междунар. науч.-техн. конф. ПАУТС-2009. Пенза: Изд-во ПГУ, 2009. С. 345 – 348.
3. Шеремет Л. П. Принципы построения мостовых измерительных цепей для одновременного уравнивания на нескольких частотах //Проблемы технической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1975. Вып. 54. С. 14 – 19.
4. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 1. С. 60 – 90.

Дата принятия 30.09.2010 г.

