519.24

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ СЛУЧАЙНОСТИ И ОТСУТСТВИЯ ТРЕНДА

Б. Ю. ЛЕМЕШКО, А. С. КОМИССАРОВА, А. Е. ЩЕГЛОВ

*Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия, e-mail: Lemeshko@fpm.ami.nstu.ru*

Исследованы распределения статистик ряда критериев, используемых при проверке гипотез об отсутствии тренда в математических ожиданиях и дисперсиях наблюдаемых величин. Отмечены недостатки некоторых критериев и проведен сравнительный анализ мощности критериев.

***Ключевые слова**: критерии проверки случайности и отсутствия тренда, параметрические критерии, ранговые критерии обнаружения сдвига, мощность критерия.*

The analysis of asymptotic distributions of various tests for trend detection in expectations and variances of the values under observation is conducted. The disadvantages of some tests are shown and the results of a comparative test power analysis are presented.

***Key words**: test for trend detection, parametrical tests, rank tests for scale shift, power of test.*

Для анализа выборок случайных величин (временных рядов) на предмет отсутствия тренда в характеристиках измеряемой величины в приложениях используют ряд параметрических и непараметрических критериев проверки гипотез. Совокупность этих критериев реализована в программных системах статистического анализа, описана в работах авторов соответствующих критериев, в различных учебных пособиях, иногда совокупность критериев изложена в одном источнике [1]. Однако при выполнении статистического анализа выбор того или иного критерия должен сделать сам специалист. Предпосылкой, обусловливающей применение параметрических критериев, как правило, является предположение о принадлежности анализируемых данных нормальному закону. Рассмотрим, что происходит с распределениями статистик таких критериев в случае нарушения предположения о нормальности и насколько будут оставаться корректными выводы, основанные на классических результатах.

При ограниченных объемах выборок распределения статистик параметрических и непараметрических критериев могут существенно отличаться от их асимптотических распределений, используемых в процедуре проверки гипотезы. Для непараметрических критериев эта проблема может усугубляться. Например, вследствие ярко выраженной дискретности значений статистики критерия применение асимптотического вместо истинного распределения этой статистики оказывается неправомерным даже при больших объемах выборок.

При использовании непараметрических критериев не требуется выполнения предположения о принадлежности выборок анализируемых величин некоторому параметрическому закону (например нормальному). Однако сведения о том, насколько непараметрические критерии уступают по мощности параметрическим критериям, представляются неполными. Пользователя может заинтересовать наличие или отсутствие тренда в математическом ожидании (в среднем) и дисперсиях.

Проверка отсутствия тренда (случайности) *в математическом ожидании.* Задача формулируется следующим образом. Имеется временной ряд $x_1, ..., x_n$ значений взаимно независимых случайных величин с математическими ожиданиями $\mu_1, ..., \mu_n$ и одинаковыми (но неизвестными) дисперсиями. Проверяют гипотезу H_0: $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2, ..., n$ о том, что все выборочные значения принадлежат к одной генеральной совокупности со средним μ, против конкурирующей гипотезы о наличии тренда H_1: $|\mu_{i+1}| > 0$, $i = 1, 2, ..., n - 1$.

Для проверки такого рода гипотез предназначен критерий Аббе. В [2] отмечена устойчивость распределения статистики этого критерия к отклонениям от нормального закона. В [3] распределения статистики критерия Аббе исследованы при справедливости гипотезы H_0 и принадлежности ошибок измерений разным симметричным законам, подтверждена устойчивость распределения указанной статистики Аббе к нарушению предположения о нормальности $x_1, ..., x_n$ и исследована мощность критерия по отношению к различным конкурирующим гипотезам.

Критерий Аббе далеко не единственный, ориентированный на проверку случайности и отсутствия тренда. Этим же целям служат критерий автокорреляции и ряд непараметрических критериев.

Гипотезу об отсутствии тренда в дисперсии формулируют аналогичным образом (проверяют H_0: $\sigma_i = \sigma$, $i = 1, 2, ..., n$, против H_1: $|\sigma_{i+1} - \sigma_i| > 0$, $i = 1, 2, ..., n - 1$).

При *проверке отсутствия сдвига в дисперсии* (в характеристиках рассеяния) предполагают, что наблюдаемая последовательность измерений x_1, ..., x_n имеет одно и то же среднее μ. Проверяют гипотезу H_0:$\sigma_1^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma_0^2$ (σ_0^2 неизвестно) против конкурирующей гипотезы

$$H_1 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2 = \sigma_0^2;\ \ \sigma_{k+1}^2 = \sigma_{k+2}^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma_0^2 + \delta \ \ (\delta > 0),$$

утверждающей, что значение дисперсии меняется в некоторой неизвестной точке, т. е. k неизвестно ($1 \le k \le n - 1$).

В настоящей работе продолжено изучение совокупности критериев, ориентированных на проверку гипотез отсутствия тренда в средних и дисперсиях [4]. Были использованы компьютерные технологии исследования статистических закономерностей, в основе которых лежит методика статистического моделирования и развиваемое программное обеспечение [5]. Объем выборок моделируемых распределений статистик, на которых строились выводы, как правило, составлял от 10^4 до 10^6 в зависимости от требуемой точности.

Критерий автокорреляции. Если выборка значений x случайна, то значение ее каждого элемента не должно зависеть от значений предшествующего и последующего членов. Для проверки этой независимости используют статистику [6]:

$$r_{1,n} = \frac{n\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + n x_1 x_n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{1}$$

являющуюся коэффициентом корреляции первого порядка между элементами первичной выборки (x_1, ..., x_n) и элементами выборки, полученной из нее сдвигом на одну единицу (x_2, x_3, ..., x_n, x_1).

Статистика $r_{1,n}$ распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[r_{1,n}] = -1/(n-1);$$

$$D[r_{1,n}] = n(n-3)/(n+1)(n-1)^2 .$$

Поэтому в критерии применяют нормализованную статистику

$$r^*_{1,n} = \frac{r_{1,n} - E[r_{1,n}]}{\sqrt{D[r_{1,n}]}}, \qquad (2)$$

которая подчиняется стандартному нормальному закону $N(0, 1)$.

Асимптотические результаты можно использовать и при достаточно малых объемах выборок. Исследование распределений статистики (2) методами статистического моделирования показало, что при $n > 10$ распределение согласуется со стандартным нормальным законом. В качестве примера в таблице приведены результаты проверки согласия полученных моделированием эмпирических распределений статистики (2) со стандартным нормальным законом для объемов выборок $n = 10$; 15; 20; 25.

Проверка согласия эмпирического распределения статистики (2) со стандартным нормальным законом

n	Критерий согласия	S^*	$P\{S > S^*\}$
10	χ^2 Пирсона	98,325	$9{,}3853 \cdot 10^{-18}$
	Колмогорова	2,3636	$2{,}8081 \cdot 10^{-5}$
	ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова	1,2307	0,0007
	Ω^2 Андерсона–Дарлинга	8,2358	$8{,}8646 \cdot 10^{-5}$
15	χ^2 Пирсона	60,920	$3{,}0736 \cdot 10^{-10}$
	Колмогорова	1,6246	0,0102
	ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова	0,7182	0,0115
	Ω^2 Андерсона–Дарлинга	4,8892	0,0032
20	χ^2 Пирсона	20,862	0,0075
	Колмогорова	1,1880	0,1189
	ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова	0,3196	0,1192
	Ω^2 Андерсона–Дарлинга	2,0998	0,0810
25	χ^2 Пирсона	24,353	0,0020
	Колмогорова	1,1502	0,1418
	ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова	0,2994	0,1357
	Ω^2 Андерсона–Дарлинга	1,7711	0,1232

Проверку осуществляли для выборок статистик объемом $N = 10^4$ по критериям χ^2 Пирсона, Колмогорова, ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова, Ω^2 Андерсона–Дарлинга. В случае критерия χ^2 Пирсона использовали асимптотически оптимальное группирование с разбиением на 9 интервалов [7, 8]. По достигнутым уровням значимости, представляющим собой вероятность $P\{S > S^*\}$, где S – статистика соответствующего критерия согласия; S^* – ее значение, вычисленное по анализируемой выборке, можно судить о сходимости распределений статистики (2) к стандартному нормальному закону.

Критерий автокорреляции относится к параметрическим, в этой связи были проведены исследования распределений статистики критерия для случая принадлежности случайной величины различным законам, в том числе семейству с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_2}{2\theta_1 \Gamma(1/\theta_2)} \exp\left(-\left(\frac{|x-\theta_0|}{\theta_1}\right)^{\theta_2}\right) \qquad (3)$$

с параметрами формы $\theta_2 = 0{,}2$; $0{,}5$; 1; $1{,}5$; 2; 4; 8. В этом случае вид закона менялся от близкого к распределению Коши до близкого к равномерному закону. При $\theta_2 = 2$ выражение (3) дает плотность нормального закона распределения. Полученные в результате моделирования распределения статистики критерия автокорреляции в случае принадлежности случайной величины законам распределения семейства (3) при различных параметрах формы представлены на рис. 1.

Как следует из этого рисунка, если выборки $x_1, ..., x_n$ принадлежат достаточно широкому кругу законов, то распределение статистики критерия автокорреляции практически не отличается от распределения, имеющего место в случае принадлежности $x_1, ..., x_n$ нормальному закону. Если закон, которому принадлежат случайные величины, симметричен и обладает не слишком «тяжелыми» хвостами, то распределение статистики значимо не отличается от «классического».

При сильной асимметричности закона распределения случайных величин (например, при показательном законе) распределение статистики становится отличным от «классического». В то же время, асимметричность закона влияет на распределение статистики менее значимо, чем «тяжесть» хвостов. И если выборки $x_1, ..., x_n$ принадлежат к асимметричным законам экстремальных значений (минимального или максимального), то распределения статистики практически не отличаются от «классического».

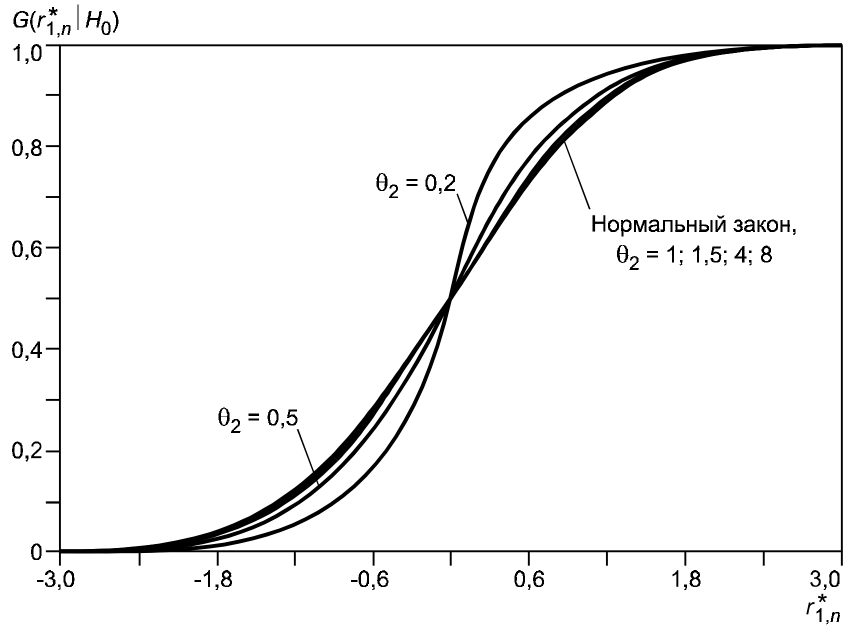

Рис. 1. Функции распределения статистики критерия автокорреляции в зависимости от параметра формы θ_2 семейства (3) для выборок объемом n = 25

Отметим, что влияние закона распределения случайных величин на распределение статистики критерия автокорреляции такое же, как для критериев, связанных с проверкой гипотез о парной корреляции [9].

Непараметрический критерий Фостера–Стюарта используют для проверки отсутствия тренда как в средних, так и в дисперсиях (в характеристиках рассеяния). Соответствующие статистики имеют вид [10]:

$$S = \sum_{i=2}^{n} S_i;$$

$$d = \sum_{i=2}^{n} d_i,$$

где $d_i = u_i - l_i$; $S_i = u_i + l_i$; $u_i = 1$, если $x_i > x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1$, иначе $u_i = 0$; $l_i = 1$, если $x_i < x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1$, иначе $l_i = 0$.

Критерий со статистикой S применяют для проверки тренда в дисперсиях, а со статистикой d – в средних. Очевидно, $0 \le S \le n-1$; $-(n-1) \le d \le n-1$.

При отсутствии тренда величины

$$t = d/\hat{\sigma}_d\ ; \tag{4}$$

$$\tilde{t} = (S-\mu)/\hat{\sigma}_S\ , \tag{5}$$

где

$$\mu = 2\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i};\ \ \hat{\sigma}_d = \sqrt{\mu} \approx \sqrt{2\ln n - 0,8456};$$

$$\hat{\sigma}_S = \sqrt{\mu - 4\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i^2}} \approx \sqrt{2\ln n - 3,4253},$$

приближенно описываются распределением Стьюдента с $\nu = n$ степенями свободы. Проверяемая гипотеза об отсутствии соответствующего тренда отклоняется при больших по модулю значениях статистик (4), (5).

На самом деле областью определения статистик t, $\tilde{t}$ являются дискретные значения. Исследование распределений статистик показало, что даже при достаточно больших объемах выборок (n = 100, 200) дискретные распределения статистик критерия *существенно отличаются от распределения Стьюдента с n степенями свободы.* На рис. 2 показаны функции распределения статистик t, $\tilde{t}$, последние отличаются еще большей дискретностью. Следовательно, использование распределений Стьюдента вместо истинных дискретных распределений статистик для определения достигнутого уровня значимости может приводить к ошибкам.

Непараметрический критерий Кокса–Стюарта так же, как и предыдущий, используют для проверки последовательности измерений на предмет обнаружения тренда в среднем и в дисперсии. В первом случае для выборки объемом n применяют статистику [11]:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{[n/2]}(n-2i+1)h_{i,n-i+1}\ ,$$

где $h_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если } \ x_i > x_j; \\ 0, \text{ если } \ x_i \le x_j \ (i<j). \end{cases}$

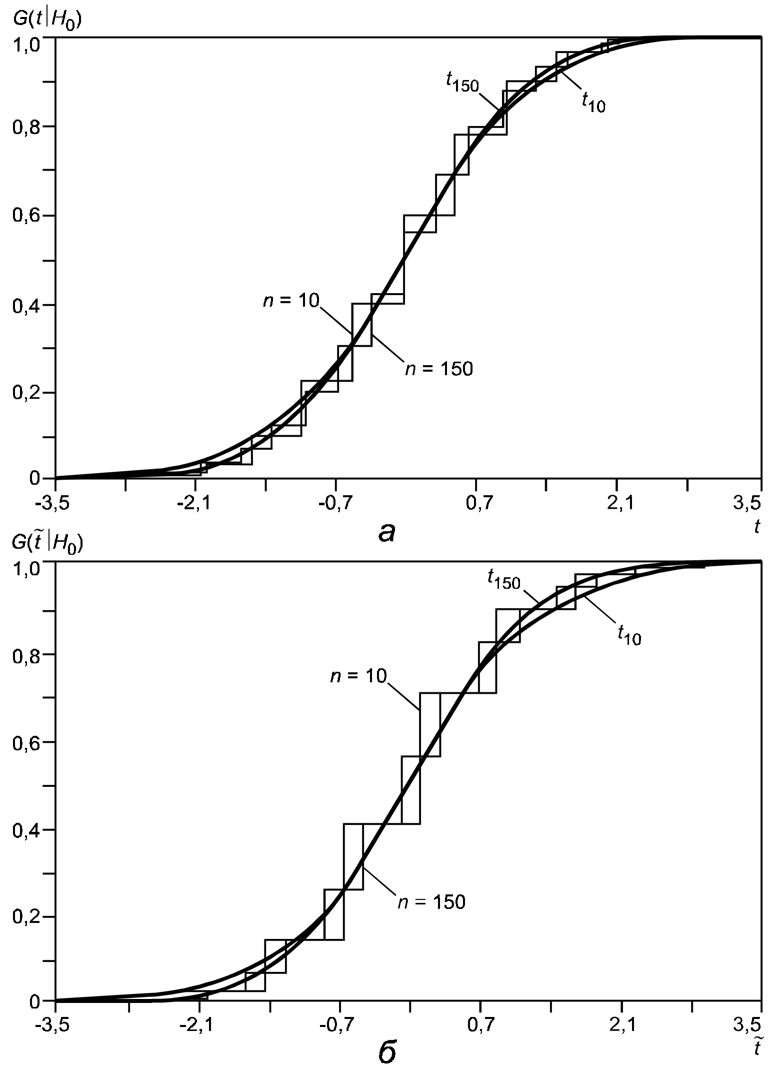

Рис. 2. Функции распределения статистики критерия Фостера–Стюарта для обнаружения тренда в средних (*а*) и в дисперсиях (*б*) при различных объемах выборок

Нормализованная статистика

$$S_1^* = (S_1 - E[S_1])\Big/\sqrt{D[S_1]}, \qquad (6)$$

где

$$E[S_1] = n^2/8; \quad D[S_1] = n(n^2-1)/24,$$

при справедливости проверяемой гипотезы об отсутствии тренда в среднем приближенно подчиняется стандартному нормальному закону.

Распределение статистики S_1^* является дискретным, и при малых n следует учитывать его отличие от стандартного нормального (рис. 3, *а*, при $n = 10$). Для выборок $n = 100$ отличием распределения статистики от стандартного нормального закона при проведении анализа практически можно пренебречь и использовать для вычисления достигнутого уровня значимости функцию распределения стандартного нормального закона. Если реальные объемы выборок меньше, то может потребоваться поправка на дискретность для полученного в соответствии со стандартным нормальным законом значения статистики S_1^*.

Критерий для проверки гипотезы отсутствия тренда в дисперсии (характеристиках рассеяния) строится следующим образом. Выборку $x_1, ..., x_n$ разбивают на $[n/k]$ подвыборок объемом k элементов $x_1, ..., x_k$; $x_{k+1}, ..., x_{2k}$; $x_{2k+1}, ..., x_{3k}$; ...; $x_{n-k+1}, ..., x_n$ (если n не делится на k, отбрасывают необходимое число измерений в центре). Для каждой i-й подвыборки находят размах w_i ($1 \le i \le r$, $r = [n/k]$). Далее последовательность размахов w_i проверяют на наличие тренда критерием со статистикой S_1.

Число k в [11] рекомендуют выбирать из условий

$$n \ge 90 \to k = 5; \quad 64 \le n < 90 \to k = 4;$$
$$48 \le n < 64 \to k = 3; \quad n < 48 \to k = 2.$$

Дискретность распределения статистики S_1^* при обнаружении тренда в дисперсии заметно выше (см. рис. 3, *б*), чем при проверке его наличия в среднем. Это естественно, так как анализируемая выборка размахов содержит лишь $[n/k]$ элементов.

Критерий Вальда–Вольфовитца. Его статистика, предложенная в [12], основана на коэффициенте сериальной корреляции и имеет вид

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n x_1.$$

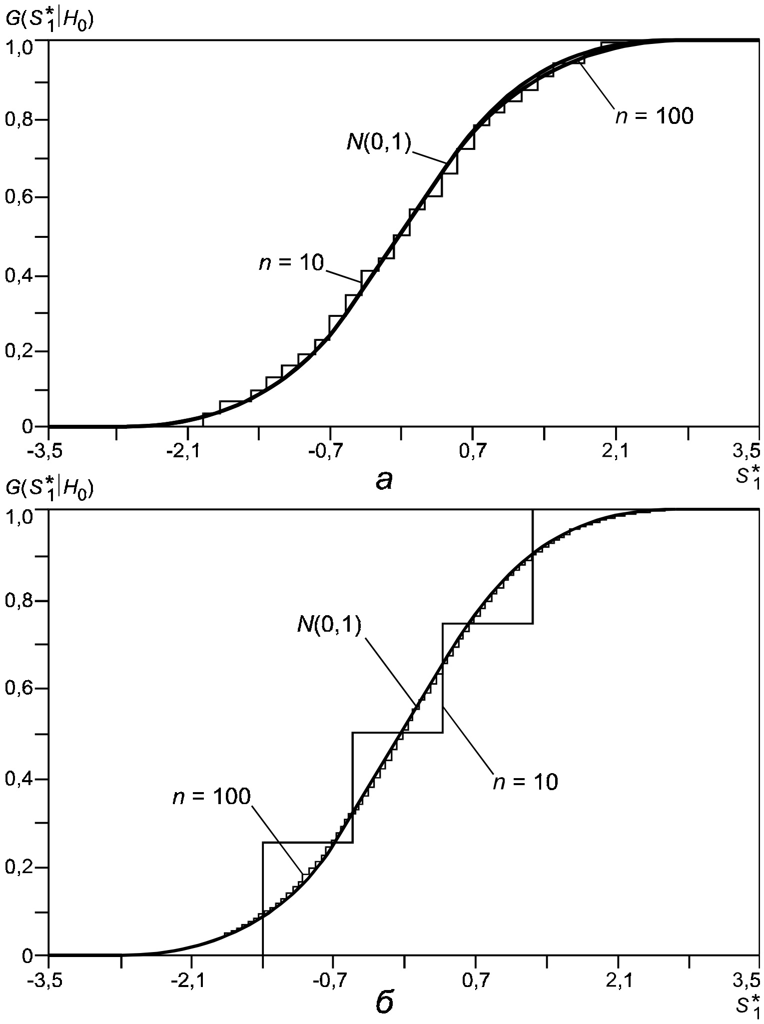

Рис. 3. Сходимость к стандартному нормальному закону функции распределения статистики (6) критерия Кокса–Стюарта для обнаружения тренда в средних (*а*) и в дисперсиях (*б*)

Величина R_1 распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием и дисперсией

$$E[R_1]=(S_1^2-S_2)/(n-1);$$

$$D[R_1]=\frac{S_2^2-S_4}{n-1}+\frac{S_1^4-4S_1^2S_2+4S_1S_3+S_2^2-2S_4}{(n-1)(n-2)}-\frac{(S_1^2-S_2)^2}{(n-1)^2},$$

где $S_r=x_1^r+\ldots+x_n^r$.

Нормализованная статистика

$$R_1^*=\left(R_1-E[R_1]\right)\Big/\sqrt{D[R_1]} \qquad (7)$$

подчиняется стандартному нормальному закону $N(0, 1)$.

Исследование распределений статистики (7) в зависимости от объема выборки и при нарушении предположения о нормальности анализируемых выборок привело к результатам, аналогичным для статистики (1): быстрая сходимость распределения R_1^* к стандартному нормальному закону и устойчивость этого распределения по отношению к отклонениям анализируемых данных от нормального закона.

В [12] была отмечена возможность построения непараметрического аналога сериального коэффициента корреляции. Такой аналог был предложен в [13]. Пусть R_i – ранг измерения x_i в упорядоченном по возрастанию ряду значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ранговый критерий сериальной корреляции Вальда–Вольфовитца имеет вид [13]:

$$R=\sum_{i=1}^{n-1}\left(R_i-\frac{n+1}{2}\right)\left(R_{i+1}-\frac{n+1}{2}\right).$$

Распределение этой статистики асимптотически нормально со средним и дисперсией

$$E[R]=0;$$

$$D[R]=n^2(n+1)(n-3)(5n+6)\big/720.$$

Гипотеза о случайности (отсутствии тренда) отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$R^*=R\Big/\sqrt{D[R]}. \qquad (8)$$

Из результатов моделирования можно сделать вывод, что распределение статистики (8) критерия смещено по отношению к предельному и очень медленно сходится к стандартному нормальному закону (рис. 4). Дискретностью распределения статистики практически можно пренебречь.

Критерий Бартелса. Пусть в последовательности n измерений R_i – ранг i-го наблюдения x_i. В [14] был предложен ранговый критерий случайности ряда, основанный на статистике

$$B = \sum_{i=1}^{n-1} (R_i - R_{i+1})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2 .$$

Гипотеза о случайности (отсутствии тренда) отклоняется при больших по модулю значениях статистики

$$B^* = B - E[B] \Big/ \sqrt{D[B]} = \left(B - 2\right) \Big/ 2\sqrt{5/(5n+7)} ,$$

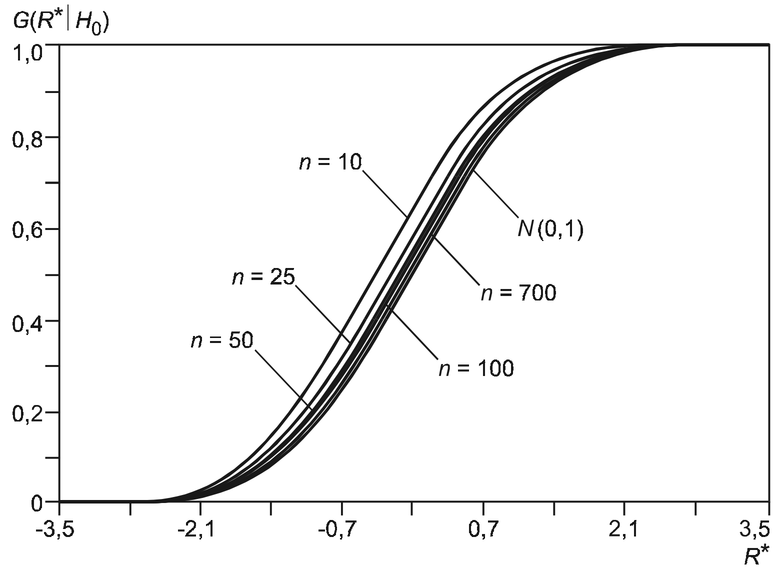

Рис. 4. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики (8) критерия Вальда–Вольфовитца

которая при отсутствии тренда приближенно подчиняется стандартному нормальному закону.

Исследования показали, что распределение статистики достаточно быстро сходится к стандартному нормальному (рис. 5).

Критерий Хсу – критерий обнаружения сдвига дисперсий – основан на статистике [15]:

$$H = \sum_{i=1}^{n} (i-1)(x_i - m_x)^2 \Big/ (n-1)\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 , \quad 0 \le H \le 1. \quad (9)$$

Обычно критерий используют в стандартизированной форме

$$H^* = (H - 0,5) \Big/ \sqrt{D[H]}, \quad (10)$$

где $D[H] = (n+1) \big/ 6(n-1)(n+2)$.

Статистика (10) при справедливости гипотезы об отсутствии сдвига дисперсии подчиняется стандартному нормальному закону. Результаты

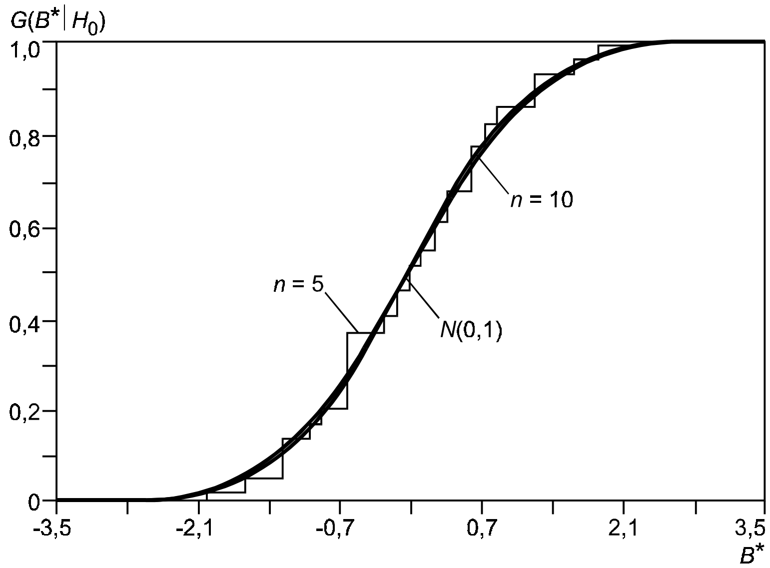

Рис. 5. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистики критерия Бартелса

моделирования представлены на рис. 6, *а*, откуда следует, что при $n > 30$ распределение статистики согласуется со стандартным нормальным законом.

Критерий Хсу относится к параметрическим. Поэтому, как и для любого параметрического критерия, связанного с проверкой гипотез о дисперсиях, распределения его статистики зависят от закона, которому принадлежат анализируемые случайные величины. Полученные при моделировании распределения статистики критерия (10) в случае принадлежности случайных величин (ошибок измерений) законам распределения семейства (3) при различных параметрах формы представлены на рис. 6, *б*. Заметна сильная зависимость распределения статистики (10) от закона распределения, которому принадлежат случайные величины. При этом наибольшее отклонение характерно для законов с «тяжелыми» хвостами. Существенно влияет на распределение статистики и асимметричность закона.

В [15] описан критерий, позволяющий определить точку изменения дисперсии в случае принадлежности ошибок измерений нормальному закону. Его статистика строится следующим образом. Пусть для $k = 1, 2, ..., n-1$

$$w_k = \sum_{i=1}^{k}(x_i - m_x)^2;$$

$$W_k = \frac{w_n - w_k}{w_k}\frac{k}{n-k},$$

где k соответствует искомой точке изменения дисперсии.

Из уравнения

$$F_{\gamma_k}(n-k, k) = W_k,$$

где $F_\gamma(f_1, f_2)$ – γ-квантиль F-распределения Фишера со степенями свободы f_1, f_2, находят оценки γ_k, которые должны подчиняться равномерному закону. Статистика G-критерия имеет вид

$$G = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k, \quad 0 \le G \le 1.$$

Гипотеза об отсутствии изменения дисперсии отклоняется с уровнем значимости α, если $G > G_{1-\alpha}$. В этом случае значение k, которому соответствует максимальная величина $|\gamma_k - 1/2|$, дает оценку искомой

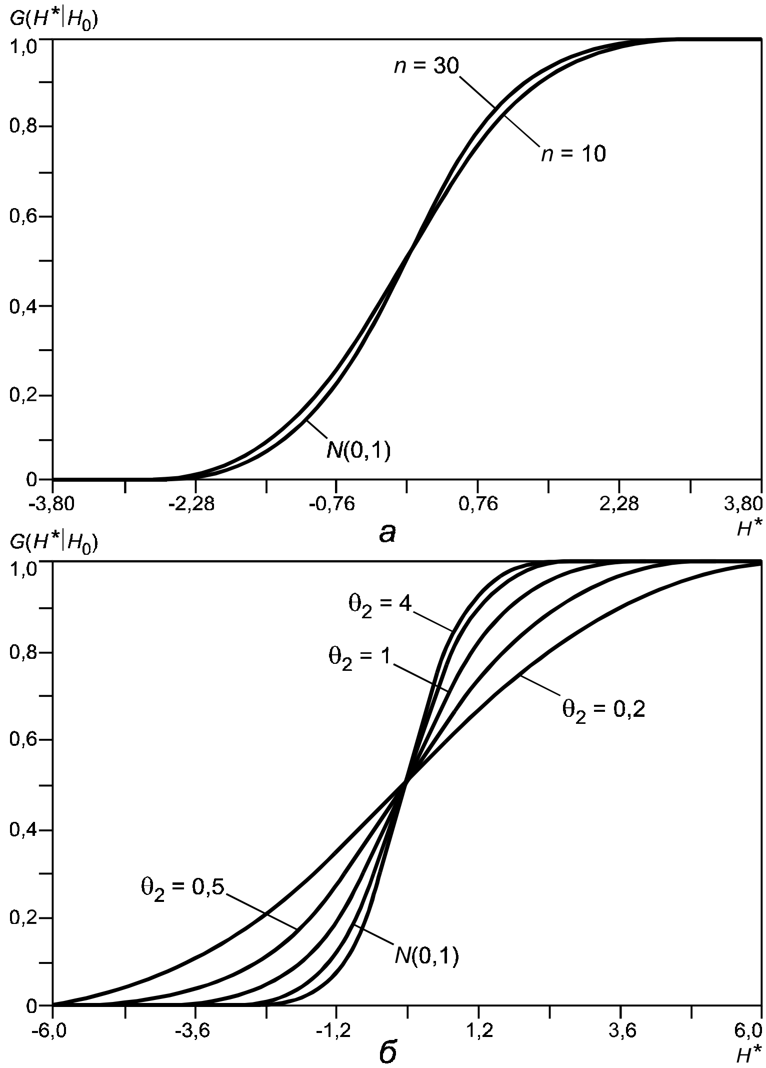

Рис. 6. Сходимость распределения статистики (10) критерия Хсу к стандартному нормальному закону (*а*) и ее распределения в случае принадлежности случайных величин законам семейства (3) при различных значениях параметра формы θ_2 и при $n = 30$ (*б*)

точке изменения значения дисперсии в наблюдаемом ряду. Критические значения $G_{1-\alpha}$ можно найти в [1].

Как и критерий со статистиками (9), (10), данный критерий применим только при извлечении выборок из нормальной генеральной совокупности.

Ранговый критерий обнаружения сдвига дисперсии (характеристики рассеяния) в неизвестной точке основан на использовании семейства ранговых статистик вида [16]:

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} i a_n(R_i), \tag{11}$$

где R_i – ранги выборочных значений в упорядоченном ряду измерений.

Метки a_n критерия могут быть различными, например: метки Клотца $a_{1n}(i) = U^2_{i/(n+1)}$, где U_γ – γ-квантиль стандартного нормального закона; метки Сэвиджа $a_{2n}(i) = \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{n-j+1}$.

Соответствующие (11) статистики обозначим $S_{R,j} = \sum_{i=1}^{n} i a_{jn}(R_i)$, $j = 1, 2$. При отсутствии сдвига дисперсии в ряду измерений статистики $S_{R,j}$ свободны от распределения и симметричны относительно

$$E[S_{R,j}] = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{jn}(i).$$

При $n > 15$ и справедливости гипотезы об отсутствии сдвига в характеристике рассеяния случайной величины статистики

$$S^*_{R,j} = \left(S_{R,j} - E[S_{R,j}]\right) \Big/ \sqrt{D[S_{R,j}]},$$

где

$$E[S_{R,1}] = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} U^2_{i/(n+1)}; \quad E[S_{R,2}] = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$D[S_{R,1}] = \frac{n(n+1)}{12} \sum_{i=1}^{n} U^4_{i/(n+1)} - \frac{1}{3n+3} \left[E[S_{R,1}] \right]^2;$$

$$D[S_{R,2}]=\frac{n(n+1)}{12}\left(n-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right),$$

приближенно подчиняются стандартному нормальному закону (рис. 7).

Сравнительный анализ мощности критериев проводили для случая принадлежности наблюдаемых случайных величин нормальному закону. Проверяемой гипотезе H_0 соответствует выполнение предположения о независимости наблюдаемых случайных величин (отсутствие тренда). В качестве конкурирующих гипотез рассматривали различные ситуации при тренде в средних или в дисперсии.

При исследовании мощности критериев об отсутствии тренда в средних рассматривали модели задания линейного, периодического и смешанного трендов.

В случае линейного тренда случайные величины моделировались согласно выражению

$$x_i = at + \xi_i\,, \tag{12}$$

где ξ_i – независимые случайные величины, распределенные в соответствии с заданным законом (например, по стандартному нормальному закону), $t \in [0, 1]$. Справедливой проверяемой гипотезе H_0 соответствует значение параметра $a = 0$.

Величины x_i из (12) вычислялись по выражению $x_i = a(i-1)\Delta t + \xi_i$, в котором шаг $\Delta t = 1/n$ зависел от объема выборки. Псевдослучайные величины ξ_i генерировались в соответствии со стандартным нормальным законом (возможно и по любому другому). Исследовали мощность критерия относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2 с линейным трендом, задаваемыми параметрами $a = 0{,}5$; 4. Примеры временных рядов при тренде с указанным параметром a и объеме выборки $n = 100$ представлены на рис. 8.

При периодическом и смешанном трендах случайные величины моделировались в соответствии с выражениями

$$x_i = a\sin\left(2\pi t\right) + \xi_i\,;$$

$$x_i = at + a\sin(2\pi t) + \xi_i\,.$$

На рис. 9 для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ приведены значения мощности $1-\beta$ рассматриваемых критериев тренда и случайности относительно конкурирующих гипотез H_1 (при $a = 0{,}5$) и H_2 (при

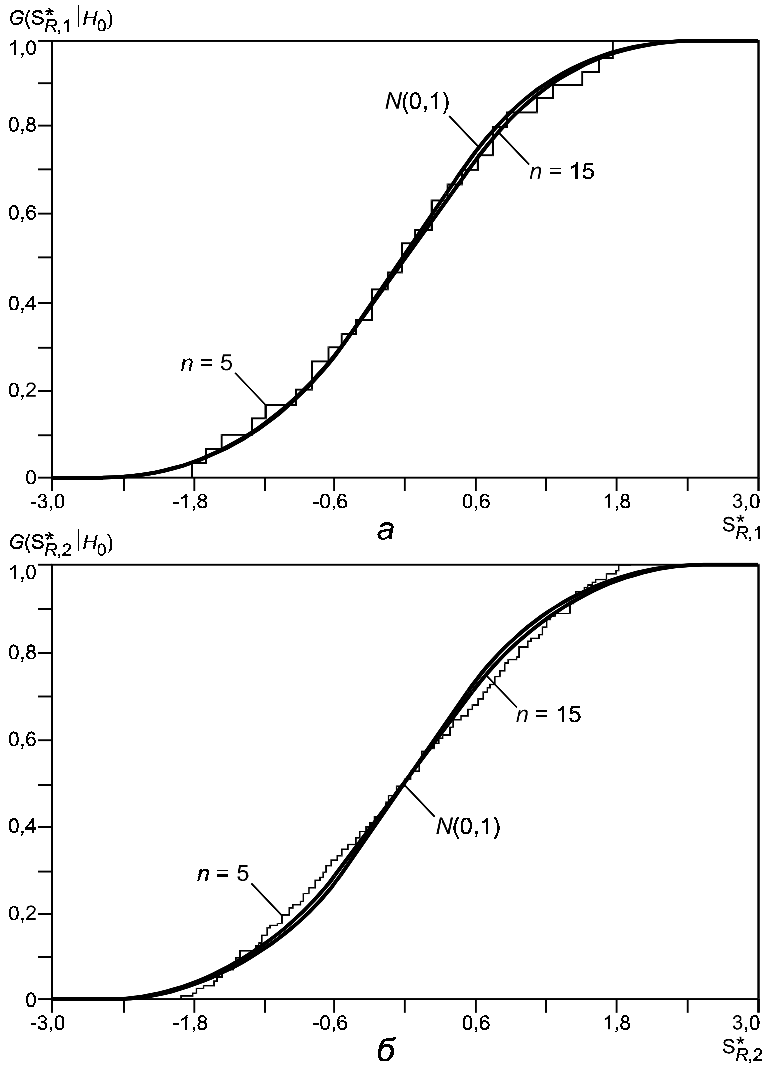

Рис. 7. Сходимость к стандартному нормальному закону распределения статистик рангового критерия обнаружения сдвига дисперсии в неизвестной точке:

$S^*_{R,1}$ с метками Клотца (*а*), $S^*_{R,2}$ с метками Сэвиджа (*б*)

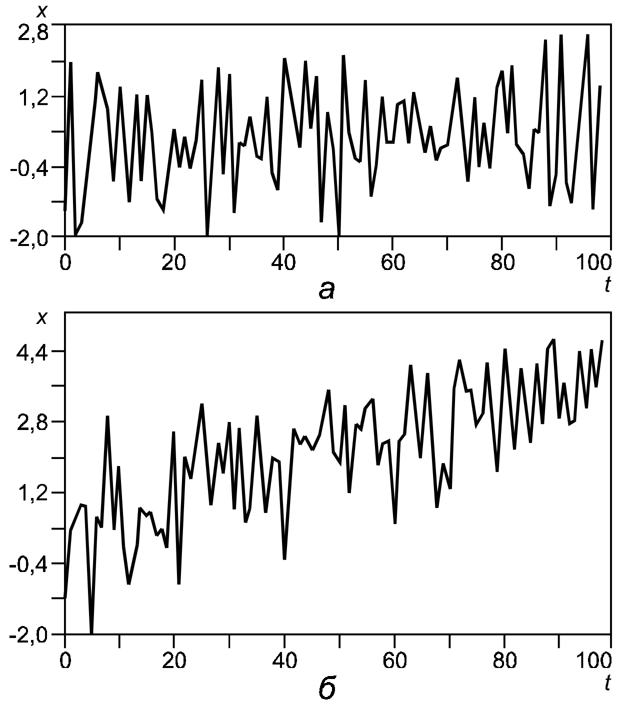

Рис. 8. Линейные тренды при $a = 0{,}5$ (*а*) и $a = 4$ (*б*)

$a = 4$) с линейным трендом (12) в зависимости от объема выборки n. Из этого рисунка следует, что критерий Фостера–Стюарта (t) значительно уступает критериям Кокса–Стюарта (S_1^*), автокорреляции ($r_{1,n}^*$), Вальда–Вольфовитца (R^*) и Бартелса (B^*).

Рассмотренные критерии проверки гипотез об отсутствии тренда в средних, включая критерий Аббе, можно упорядочить по мощности относительно линейного тренда следующим образом: Аббе (S_A) $\succ$ Кокса–Стюарта (S_1^*) $\succ$ Бартелса (B^*) $\succ$ ранговой сериальной корреляции Вальда–Вольфовитца (R^*) $\succ$ автокорреляции ($r_{1,n}^*$), сериальной корреляции Вальда–Вольфовитца (R_1^*) $\succ$ Фостера–Стюарта (t). Если рассматривать конкурирующие гипотезы с произвольным трендом, то целесообразно рекомендовать использование критериев Аббе, Бартелса, Вальда—Вольфовитца (ранговый и неранговый варианты) и автокорреляции.

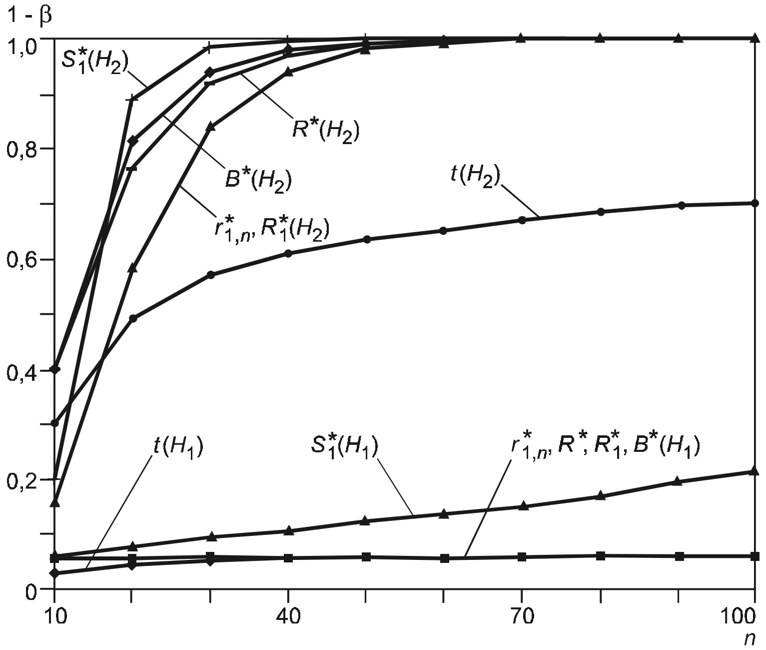

Рис. 9. Мощность критериев тренда и случайности относительно конкурирующих гипотез с линейным трендом

Наименьшую мощность показал критерий Фостера–Стюарта. В определенной степени такой результат объясняется сильной дискретностью распределения статистики данного критерия, вследствие чего действительный уровень значимости существенно отличается от задаваемого $\alpha = 0{,}05$ и получаемые оценки мощности оказываются заниженными.

Мощность критериев обнаружения тренда в характеристиках рассеяния исследовали для ситуации линейного тренда в дисперсии в качестве конкурирующей гипотезы. Сравнивали мощности критериев Фостера–Стюарта ($\tilde{t}$), Кокса–Стюарта (S_1^*), автокорреляции ($r_{1,n}^*$), ранговой (R^*) и неранговой (R_1^*) сериальных корреляций Вальда–Вольфовитца, Бартелса (B^*). Оказалось, что мощность критериев Фостера–Стюарта и Кокса–Стюарта, специально построенных для выявления тренда в дисперсии, значительно превышает мощность остальных критериев. При этом для обнаружения тренда в дисперсии предпочтительным является первый критерий: Фостера–Стюарта ($\tilde{t}$) $\succ$ Кокса–Стюарта (S_2^*).

При изучении мощности критериев сдвига дисперсии в неизвестной точке в качестве конкурирующих гипотез рассматривали ее скачкообразный сдвиг. Сравнивали мощность ранговых критериев обнаружения сдвига дисперсии в неизвестной точке с метками Клотца ($S^*_{R,1}$) и Сэвиджа ($S^*_{R,2}$), критерия Хсу (H^*) и G-критерия. В случае принадлежности случайных величин нормальному закону указанные критерии можно упорядочить следующим образом: критерий Хсу (H^*) $\succ$ критерий сдвига дисперсии с метками Клотца ($S^*_{R,1}$) $\succ$ G-критерий (G) $\succ$ $\succ$ критерий сдвига дисперсии с метками Сэвиджа ($S^*_{R,2}$).

Таким образом, на основании проведенных исследований можно констатировать, что применение параметрических критериев обнаружения тренда в средних (критерии автокорреляции, Аббе) будет корректным и в тех случаях, когда закон распределения существенно отличается от нормального, но является симметричным и без «тяжелых» хвостов. Это общая тенденция устойчивости распределений параметрических критериев, так или иначе связанных с проверкой гипотез о математических ожиданиях [17 – 18] или о равенстве нулю коэффициентов парной, частной и множественной корреляций [9]. Однако мощность параметрических критериев обнаружения тренда в средних лишь немногим превышает мощность непараметрических.

Параметрические критерии обнаружения сдвига в дисперсии (Хсу) мощнее непараметрических, но очень чувствительны к нарушению предположений о нормальности случайных величин, как и любые критерии, связанные с проверкой гипотез о дисперсиях [17, 19 – 21].

Использование критериев Фостера–Стюарта затруднено дискретностью распределений статистик и плохой сходимостью к соответствующим t-распределениям Стьюдента.

Распределение статистики рангового критерия сериальной корреляции Вальда–Вольфовитца смещено относительно стандартного нормального закона, к которому очень медленно сходится. При использовании нерангового критерия такой проблемы не возникает.

Полученные оценки мощности критериев позволяют судить о возможности обнаруживать линейный и нелинейный тренды в среднем или в характеристиках рассеяния.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00056а) и Федеральной целевой программы Минобрнауки РФ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кобзарь А. И.** Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

2. **Струнов В. И.** О применении критерия Аббе для анализа независимости рядов измерений, характеризующихся отличными от нормального законами распределения // Измерительная техника. 2006. № 8. С. 13 – 17; **Strunov V. I.** Applying the Abbé test to the independence of measurement series with distributions deviating from normal //Measurement Technique. 2008. V. 49. N 8. P. 962 – 969.

3. **Лемешко С. Б.** Критерий независимости Аббе при нарушении предположений нормальности //Измерительная техника. 2006. № 10. С. 9 – 14; **Lemeshko S. B.** The Abbé independence test with deviations from normality //Measurement Technique. 2006. V. 49. N 10. P. 962 – 969.

4. **Беркович А. С., Лемешко Б. Ю., Щеглов А. Е.** Исследование распределений статистик критериев тренда и случайности //Актуальные проблемы электронного приборостроения: Материалы X междунар. конф. АПЭП–2010. Новосибирск, 2010. Т. 6. С. 13 – 17.

5. **Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей /Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.

6. **Knoke J. D.** Testing for randomness against autocorrelation: The parametric case // Biometrica. 1975. V. 62. P. 571 – 575.

7. **Денисов В. И., Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.** Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Ч. I. Критерии типа χ^2. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. С. 126.

8. **Р 50.1.033–2001.** Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа хи-квадрат.

9. **Лемешко Б. Ю., Помадин С. С.** Исследование распределений статистик корреляционного анализа при отклонении многомерного закона от нормального //Актуальные проблемы электронного приборостроения: Труды V междунар. конф. АПЭП–2000. Новосибирск, 2000. Т. 7. С. 184 – 187.

10. **Foster F. G., Stuart A.** Distribution-free tests in time series dated on the breaking of records // JRSS. 1954. V. B16. N 1. P. 1 – 22.

11. **Cox D. R., Stuart A.** Quick sign tests for trend in location and dispersion // Biometrica. 1955. V. 42. P. 80 – 95.

12. **Wald A., Wolfowitz J.** An exact test for randomness in the non-parametric case based on serial correlation // An. math. stat. 1943. V. 14. P. 378 – 388.

13. **Dufour J.-M., Roy R.** Some robust exact results on sample autocorrelations and tests of randomness// J. Econometrics. 1985. V. 29. P. 257 – 273.

14. **Bartels R.** The rank version of von Neumann's ratio test for randomness // JASA. 1982. V. 77. N 377. P. 40 – 46.

15. **Hsu D. A.** Test for variance shift at an unknown time point // Appl. Statist. 1977. V. 26. N 3. P. 279 – 284.

16. **Hsieh H. K.** Nonparametric tests for scale shift at a unknown time point // Commun. Stat. Theor. Meth. 1984. V. 13. N 11. P. 1335 – 1355.

17. **Лемешко Б. Ю., Помадин С. С.** Проверка гипотез о математических ожиданиях и дисперсиях в задачах метрологии и контроля качества при вероятностных законах, отличающихся от нормального //Метрология. 2004. № 3. С. 3 – 15.

18. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б.** Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних //Измерительная техника. 2008. № 9. С. 23 – 28; **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B.** Power and robustness of criteria used to verify the homogeneity of means //Measurement Techniques. 2008. V. 51. N 9. P. 950 – 959.

19. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Горбунова А. А.** О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. I. Параметрические критерии // Измерительная техника. 2010. № 3. С. 10 – 16; **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Gorbunova A. A.** Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Pt. I. Parametric criteria //Measurement Techniques. 2010. V. 53. N 3. P. 237 – 246.

20. **Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Горбунова А. А.** О применении и мощности критериев проверки однородности дисперсий. Ч. II. Непараметрические критерии //Измерительная техника. 2010. № 5. С. 11 – 18; **Lemeshko B. Yu., Lemeshko S. B., Gorbunova A. A.** Application and power of criteria for testing the homogeneity of variances. Pt. II. Nonparametric criteria //Measurement Techniques. 2010. V. 53. N 5. P. 476 – 486.

21. **Лемешко Б. Ю., Миркин Е. П.** Критерии Бартлетта и Кокрена в измерительных задачах при вероятностных законах, отличающихся от нормального // Измерительная техника. 2004. № 10. С. 10 – 16; **Lemeshko B. Yu, Mirkin E. P.** Bartlett and Cochran tests in measurements with probability laws different from normal //Measurement Techniques. 2004. V. 47. N 10. P. 960 – 968.

Дата принятия 25.10.2010 г.