681.311

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОТОРЫХ ОПИСЫВАЮТСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ

И. В. БОЙКОВ, Н. П. КРИВУЛИН

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия,
e-mail: boikov@pnzgu.ru

Предложен метод идентификации параметров динамических систем, функционирование которых моделируется обыкновенными дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка.

Ключевые слова: *линейные системы с переменными параметрами, идентификация линейных систем, импульсная переходная функция, дифференциальные уравнения с производными дробного порядка.*

A method of identification of dynamic systems parameters with mathematical models described by ordinary differential equations with fractional derivatives is suggested.

Key words: *linear systems with variable parameters, identification of dynamic systems, pulse response function, differential equations with fractional derivatives.*

При исследовании многих динамических систем возникает задача учета последействий, когда система описывается не только мгновенными значениями ее составляющих, но и состоянием в предшествующие промежутки времени. Подобные последействия в последнее время активно исследуются в различных разделах техники, физики, экологии и биологии и получили общее название эредитарности. Учет эредитарности позволяет выявить многие ранее неизвестные свойства динамических систем, а современное состояние вычислительной техники и численных методов – успешно их моделировать. Этим объясняется активное развитие теории эредитарных процессов в настоящее время. Подробное изложение теории и основные приложения эредитарных процессов содержатся в [1 – 3].

В большинстве случаев эредитарные процессы описывают дифференциальными уравнениями с дробными производными. Помимо указанных выше, существует большое число публикаций, в которых решается прямая задача – исследование динамического процесса при известных параметрах. Отметим, что идентификация систем, описываемых производными целого порядка, рассматривалась в [4 – 6]. Данная статья посвящена анализу идентификации систем, описываемых уравнениями с дробными производными.

Рассмотрим динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с дробными производными:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k D_{0t}^{\alpha_k} y = x(t)\,, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$b_{kj} = D_{0t}^{\alpha_k - j} y,\;\; k = 1,2,\ldots,n;\;\; j = 1,2,\ldots,m_k;\;\; m_k = [\alpha_k] + 1\,. \tag{2}$$

Здесь $D_{0t}^{\alpha_k} y = \dfrac{1}{\Gamma(m_k - \alpha)} \dfrac{d^{m_k}}{dt^{m_k}} \displaystyle\int_0^t \dfrac{y(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{\alpha - m_k + 1}} d\tau,\;\; k = 1,2,\ldots,n$ [2], где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Будем считать, что параметры системы удовлетворяют условиям $\alpha_k > 0,\;\; m_k - 1 < \alpha_k \le m_k,\;\; A_k \in R,\;\; k = 1,2,\ldots,n$.

Требуется найти дробные показатели $\alpha_k,\; k = 1,2,\ldots,n$ и коэффициенты $A_k \in R,\; k = 1,2,\ldots,n$, зная входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы системы (1) с начальными условиями (2).

Применив преобразование Лапласа к уравнению (1) с начальными условиями (2), получим

$$Y(p) \sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1} = X(p)\,. \tag{3}$$

Преобразование Лапласа для производной дробного порядка имеет вид [2]: $L\left[D_{0t}^{\alpha} y(t)\right] = p^{\alpha} Y(p) - \sum_{j=1}^{n} b_j p^{j-1}$, где $Y(p) = \int_0^{+\infty} y(t) e^{-pt} dp$ – преобразование Лапласа функции $y(t)$, которое определено в области $\operatorname{Re} p > \sigma$, где функция $Y(p)$ является аналитической, $b_j = D_{0t}^{\alpha-j} y,\ j = 1,2,...,n;\ \ n = [\alpha]+1$ – значения производных соответствующего порядка функции $y(t)$ при $t = 0$.

Из выражения (3), при таких значениях p, что $Y(p) \neq 0$ и $\operatorname{Re} p > \sigma$ получим

$$\sum_{k=1}^{n} A_k p^{\alpha_k} = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1} \right) \Big/ Y(p) \right) + X(p)/Y(p)\,, \tag{4}$$

где $b_{kj} = D_{0t}^{\alpha_k - j} y,\ \ k = 1,2,...,n;\ \ j = 1,2,...,m_k;\ \ m_k = [\alpha_k]+1$ – начальные условия; $\alpha_k,\ A_k,\ k = 1,2,...,n$ – искомые параметры.

Запишем соотношение (4) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \left(p^{\alpha_k} - \left(\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} p^{j-1} \Big/ Y(p) \right) \right) = X(p)/Y(p)\ . \tag{5}$$

Определение неизвестных $2n$ параметров $\alpha_k,\ A_k,\ k = 1,2,...,n$, требует $2n$ уравнений, для составления которых будем использовать методы коллокаций и наименьших квадратов. При решении методом коллокаций нужно располагать $2n$–узлами; при решении методом наименьших квадратов число узлов может быть произвольным, но не меньшим чем $2n$. Рассмотрим сегмент

$$\Delta = [a,b] \in \operatorname{Re} p \geq c\,. \tag{6}$$

Сегмент $[a, b]$ расположен в области $[c,+\infty]$, $c = \max(c_1, c_2)$, где c_1, c_2 – определяются из условий

$$\begin{cases} X(p) \text{ - аналитическая функция при } \operatorname{Re} p \geq c_1, \\ Y(p) \text{ - аналитическая функция при } \operatorname{Re} p \geq c_2, \\ \qquad Y(p) \neq 0, \quad \text{при } \operatorname{Re} p \in [a,b]. \end{cases}$$

На сегменте $[a, b]$ введем узлы

$$t_i = a + \frac{b-a}{N} i,\ i = 1,2,...,N\,, \tag{7}$$

где $N = 2n$, т. е. число узлов равно числу неизвестных $\alpha_k,\ A_k$ в выражении (5).

При решении методом коллокаций, приравняв левую и правую части выражения (5) в узлах t_i, получим систему алгебраических уравнений относительно искомых параметров:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \left(t_i^{\alpha_k} - \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{\,j-1} \Big/ Y(t_i) \right) = X(t_i)/Y(t_i),$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \left(t_i^{\alpha_k} - \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{\,j-1} \Big/ Y(t_i) \right) - \left(X(t_i)/Y(t_i) \right) = 0 . \qquad (8)$$

Решив ее, найдем значения неизвестных $A_1, A_2, ..., A_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

При решении методом наименьших квадратов, воспользовавшись выражением (5), на сегменте (6) по узлам (7) определим функционал

$$\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} B_k \left(t_i^{\beta_k} - \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{\,j-1} \Big/ Y(t_i) \right) - \left(X(t_i)/Y(t_i) \right) \right)^2 . \qquad (9)$$

Значения параметров $B_1, B_2, ..., B_n$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ вычислим из условия минимума функционала $\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right)$, которым является решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial B_j} = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \beta_j} = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n. \end{cases} \qquad (10)$$

Отсюда получим систему уравнений для определения искомых параметров:

$$\begin{cases}
B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n^2(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_n(t_i) + ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i)\varphi_n(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_n(t_i); \\
B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}^2(t_i) + ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_{n-1}(t_i); \\
\qquad ... \\
B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i)\varphi_1(t_i) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_1(t_i) + ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1^2(t_i) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_1(t_i); \\
B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i) t_i^{\beta_1} \ln t_i + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i) t_i^{\beta_1} \ln t_i + ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i) t_i^{\beta_1} \ln t_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)} t_i^{\beta_1} \ln t_i; \\
B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i) t_i^{\beta_2} \ln t_i + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i) t_i^{\beta_2} \ln t_i + ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i) t_i^{\beta_2} \ln t_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)} t_i^{\beta_2} \ln t_i \\
\qquad ... \\
B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i) t_i^{\beta_n} \ln t_i + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i) t_i^{\beta_n} \ln t_i + ... + B_1 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i) t_i^{\beta_n} \ln t_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X(t_i)}{Y(t_i)} t_i^{\beta_n} \ln t_i .
\end{cases} \qquad (11)$$

Здесь $\varphi_k(t_i) = t_i^{\beta_k} - \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{j-1} \Big/ Y(t_i)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Решив (11) относительно неизвестных $B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, вычислим приближенные значения искомых неизвестных $A_1, A_2, ..., A_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Отметим, что необходимое условие (10) минимума функционала (9) определяет систему (11), решение которой является критической точкой $M_0\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, ..., B_n^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, ..., \beta_n^{(0)}\right)$ функционала $\Phi(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$. Если эта точка единственная, то достаточно ограничиться только рассмотрением необходимого условия. Если критических точек несколько, то решением будет точка, в которой значение функционала по модулю наименьшее.

Использование достаточных условий экстремума представляется нецелесообразным по следующим причинам:

точное выявление экстремальных точек возможно только в исключительных случаях. Определение критических точек численными методами дает их приближенные значения, которые из-за погрешности вычислений в общем случае не совпадают с достаточными условиями экстремума;

достаточные условия экстремума имеют более сложный вид, чем необходимые условия, поэтому более простым представляется поиск всех критических точек с использованием необходимых условий и отбор тех, в которых функционал принимает наименьшее значение.

При применении метода наименьших квадратов число узлов сегмента (6) можно взять $N > 2n$.

Рассмотрим вопрос о решении систем (8), (11). В общем случае они являются нелинейными системами алгебраических уравнений. Решение подобных выражений в аналитическом виде возможно лишь в исключительных случаях. Поэтому приходится применять численные методы. Одним из наиболее эффективных является метод Ньютона–Канторовича [7 – 9]. Он дает не только приближенное решение, но и позволяет установить его существование, единственность и точность [8].

Остановимся на построении и обосновании численных методов решения нелинейных систем алгебраических уравнений (8), (11). В общем случае они состоят из $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными. Изложим метод Ньютона–Канторовича применительно к данным системам. Запишем (8) в операторной форме в виде выражения

$$Kx = 0, \tag{12}$$

где $x=\left(A_1,A_2,...,A_n,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$; вид оператора K определяется функциями $f_i\left(A_1,A_2,...,A_n,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$, $i=1,2,...,N$:

$$f_i\left(A_1,A_2,...,A_n,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)=\sum_{k=1}^{n}A_k\left(t_i^{\alpha_k}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m_k}b_{kj}t_i^{\,j-1}}{Y(t_i)}\right)-\frac{X(t_i)}{Y(t_i)},\quad i=1,2,...,N.$$

Также запишем систему (11) как:

$$Kx=0,$$

где $x=\left(B_1,B_2,...,B_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)$, вид оператора K определяется функциями $f_i\left(B_1,B_2,...,B_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)$, $i=1,...,N$:

$$\begin{cases} f_j\left(B_1,B_2,...,B_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi_k\left(t_i\right)\varphi_j\left(t_i\right)-\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{X\left(t_i\right)}{Y\left(t_i\right)}\varphi_j\left(t_i\right), \\ \qquad j=1,2,...,n, \\ f_j\left(B_1,B_2,...,B_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\sum\limits_{i=1}^{N}\varphi_k\left(t_i\right)t_i^{\alpha_j}\varphi_j\left(t_i\right)\ln\left(t_i\right)-\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{X\left(t_i\right)}{Y\left(t_i\right)}\varphi_j\left(t_i\right)t_i^{\alpha_j}\ln\left(t_i\right), \\ \qquad j=n+1,2,...,2n. \end{cases}$$

Для определенности ограничимся уравнением (12). Его решение будем искать модифицированным методом Ньютона–Канторовича:

$$x_{n+1}=x_n-\left[K'(x_0)\right]_r^{-1}K_n(x_n)\,, \tag{13}$$

где $\left[K'(x_0)\right]_r^{-1}$ – правый обратимый оператор; $K'(x_0)$ – якобиан на начальном приближении $x_0\left(A_1^{(0)},A_2^{(0)},...,A_n^{(0)},\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},...,\alpha_n^{(0)}\right)$, который выражается матрицей

$$K'=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial A_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} & ... & \dfrac{\partial f_1}{\partial A_n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial A_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \alpha_1} & ... & \dfrac{\partial f_2}{\partial A_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \alpha_n} \\ ... & ... & ... & ... & \\ \dfrac{\partial f_N}{\partial A_1} & \dfrac{\partial f_N}{\partial \alpha_2} & ... & \dfrac{\partial f_N}{\partial A_n} & \dfrac{\partial f_N}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Например, в случае системы (8) матрица Якоби имеет вид

$$K'=\begin{pmatrix} t_1^{\alpha_1}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m_1} b_{1j}t_1^{j-1}}{Y(t_1)} & A_1t_1^{\alpha_1}\ln(t_1) & \dots & t_1^{\alpha_n}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m_n} b_{nj}t_1^{j-1}}{Y(t_1)} & A_1t_1^{\alpha_n}\ln(t_1) \\ t_2^{\alpha_1}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m_1} b_{1j}t_2^{j-1}}{Y(t_2)} & A_1t_2^{\alpha_1}\ln(t_2) & \dots & t_2^{\alpha_n}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m_n} b_{nj}t_2^{j-1}}{Y(t_2)} & A_1t_2^{\alpha_n}\ln(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ t_N^{\alpha_1}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m_1} b_{1j}t_N^{j-1}}{Y(t_N)} & A_1t_N^{\alpha_1}\ln(t_N) & \dots & t_N^{\alpha_n}-\frac{\sum\limits_{j=1}^{m_n} b_{nj}t_N^{j-1}}{Y(t_N)} & A_1t_N^{\alpha_n}\ln(t_N) \end{pmatrix}.$$

Сходимость итерационного процесса (13) следует из общих теорем метода и выбора начального приближения $x_0\left(A_1^{(0)},A_2^{(0)},\dots,A_n^{(0)},\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},\dots,\alpha_n^{(0)}\right)$, при котором $K'x_0\neq 0$. В общем случае задача выбора начального приближения является самостоятельной актуальной задачей вычислительной математики. При решении практических задач, как правило, известны или приближенные значения искомых параметров системы, требующие уточнения, или интервалы, на которых требуется найти их значения. В этом случае выбор начального приближения, при котором $K'(x_0)\neq 0$, не вызывает затруднений.

Отметим также, что погрешности измерений входного $x(t)$ и соответствующего выходного $y(t)$ сигналов соответствует возмущение слагаемых $X(t_i)/Y(t_i)$ в системах уравнений (8), (11). Можно показать, что если значения $X(t_i)/Y(t_i)$ заданы с точностью ε, то погрешность итерационного процесса имеет точность $O(\varepsilon)$. Более детальное исследование этого вопроса можно найти в [9].

При постановке исходной задачи самостоятельный интерес заслуживают следующие частные случаи.

Первый частный случай. Требуется найти дробные показатели α_k, $k=1,2,\dots,n$, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы (1) с начальными условиями (2); коэффициенты $A_k\in R$, $k=1,2,\dots,n$.

Используя метод коллокаций, приходим к системе алгебраических уравнений с неизвестными α_k, $k=1,2,\dots,n$, которая примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k t_i^{\alpha_k} = \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} + \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{\,j-1}}{Y(t_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{14}$$

В этом случае число узлов t_k берется равным $N = n$.

Используя метод наименьших квадратов, запишем функционал (9) на сегменте (6) по узлам (7) как

$$\Phi\left(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} A_k t_i^{\beta_k} - \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} - \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{\,j-1}}{Y(t_i)} \right)^2 .$$

Необходимое условие минимума: $\partial\Phi/\partial\beta_j = 0,\ j = 1, 2, \dots, n$. В результате получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} A_k t_i^{\beta_k + \beta_j} \ln t_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{X(t_i)}{Y(t_i)} + \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{\,j-1}}{Y(t_i)} \right) t_i^{\beta_j} \ln t_i,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

В этом случае число узлов (7) берется $N \geq n$.

Решая данную систему уравнений, находим значения β_k, являющиеся приближенными значениями искомых дробных показателей α_k.

Второй частный случай. Требуется найти коэффициенты $A_k \in R,\ k = 1, 2, \dots, n$ и дробные показатели $\alpha_k,\ k = 1, 2, \dots, n$, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы (1) с нулевыми начальными условиями $b_{kj} = 0;\ k = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, m_k;$ $m_k = [\alpha_k] + 1$.

Используя метод коллокаций на сегменте (6) по узлам (7), приходим к системе алгебраических уравнений с неизвестными A_k, α_k:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k t_i^{\alpha_k} = X(t_i)/Y(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{15}$$

где число узлов (7) берется $N = 2n$.

Используя метод наименьших квадратов, запишем функционал (9) на сегменте (6) по узлам (7) в виде

$$\Phi\left(B_1, B_2, \dots, B_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} B_k t_i^{\beta_k} - \left(X(t_i)/Y(t_i) \right) \right)^2 .$$

Значения коэффициентов $B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ будем вычислять исходя из условия минимума функционала $\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right)$, которым является решение системы уравнений

$$\begin{cases} \partial\Phi / \partial B_j = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n, \\ \partial\Phi / \partial\beta_j = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Путем очевидных выкладок, получим

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} B_k \sum_{k=1}^{n} t_i^{\beta_k+\beta_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} t_i^{\beta_k}; \\ \sum_{k=1}^{n} B_k \sum_{k=1}^{n} t_i^{\beta_k+\beta_j} \ln(t_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} t_i^{\beta_k} \ln(t_i). \end{cases}$$

Решая данную систему для неизвестных $B_1, B_2, ..., B_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, получим приближенные значения $A_1, A_2, ..., A_n, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. В этом случае число узлов (7) берется $N \geq 2n$.

Третий частный случай. Требуется найти коэффициенты $A_k \in R, \;\; k = 1, 2, ..., n$, зная входной сигнал $x(t)$, соответствующий выходной сигнал $y(t)$ и дробные показатели $\alpha_k, k = 1, 2, ..., n$ системы (1) с начальными условиями (2).

Используя метод коллокаций на сегменте (6) по узлам (7), приходим к системе линейных алгебраических уравнений с неизвестными A_k:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \left(t_i^{\alpha_k} - \left(\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{\,j-1} \Big/ Y(t_i) \right) \right) = X(t_i) / Y(t_i) \quad i = 1, 2, ..., N.$$

В этом случае число узлов (7) берется $N = n$.

Применив метод наименьших квадратов, запишем функционал (9) на сегменте (6) по узлам (7) в виде

$$\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{n} B_k \left(t_i^{\alpha_k} - \frac{\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{\,j-1}}{Y(t_i)} \right) - \left(X(t_i) / Y(t_i) \right) \right)^2.$$

Значения параметров $B_1, B_2, ..., B_n$, найдем из условия минимума функционала $\Phi\left(B_1, B_2, ..., B_n\right)$, которым является решение системы уравнений $\partial\Phi / \partial B_j = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n$. В подробной записи она имеет вид:

$$\begin{cases} B_n \sum_{i=1}^{N} \varphi_n^2(t_i) + B_{n-1} \sum_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_n(t_i) + \ldots + B_1 \sum_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i)\varphi_n(t_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_n(t_i); \\ B_n \sum_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) + B_{n-1} \sum_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}^2(t_i) + \ldots + B_1 \sum_{i=1}^{N} \varphi_1(t_i)\varphi_{n-1}(t_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_{n-1}(t_i); \\ \ldots \\ B_n \sum_{i=1}^{N} \varphi_n(t_i)\varphi_1(t_i) + B_{n-1} \sum_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}(t_i)\varphi_1(t_i) + \ldots + B_1 \sum_{i=1}^{N} \varphi_1^2(t_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{X(t_i)}{Y(t_i)} \varphi_1(t_i), \end{cases}$$

где $\varphi_k(t_i) = t_i^{\alpha_k} - \dfrac{\sum_{j=1}^{m_k} b_{kj} t_i^{j-1}}{Y(t_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.; \quad N \geq 2n$.

Решив данную систему для неизвестных $B_1, B_2, \ldots, B_n$, получим приближенные значения искомых неизвестных $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Частным случаем уравнения (1) с начальными условиями (2) является обыкновенное дифференциальное уравнение, у которого порядки производных – натуральные числа. В этом случае получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$A_n \frac{d^n y}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = x(t), \tag{16}$$

и с начальными условиями:

$$y(0) = b_1;\ y'(0) = b_1, \ldots;\ \ y^{(n-1)}(0) = b_n. \tag{17}$$

Тогда задача формулируется следующим образом.

Требуется найти коэффициенты $A_k \in R, \;\; k = 0, 1, \ldots, n$, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы (16) с начальными условиями (17).

В этом случае выражение (4) примет вид

$$A_n p^n + A_{n-1} p^{n-1} + \ldots + A_1 p + A_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} A_k \sum_{j=1}^{n} b_j p^{j-1} \Big/ Y(p) \right) + X(p)/Y(p).$$

Используя метод наименьших квадратов, приходим к равенству

$$\Phi(B_1, B_2, \ldots, B_n) = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{n} B_k \left(t_i^{\,k} - \sum_{j=1}^{n} b_j t_i^{\,j-1} \Big/ Y(t_i) \right) - X(t_i)/Y(t_i) \right)^2.$$

Значения параметров $B_0, B_1, ..., B_n$, найдем из условия минимума функционала $\Phi\left(B_0, B_1, ..., B_n\right)$, которое имеет вид $\partial\Phi/\partial B_j = 0;\ \ j = 0,1,...,n$. Таким образом, значения $B_0, B_1, ..., B_n$ получим из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n^2\left(t_i\right) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}\left(t_i\right)\varphi_n\left(t_i\right) + ... + B_0 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_0\left(t_i\right)\varphi_n\left(t_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X\left(t_i\right)}{Y\left(t_i\right)}\varphi_n\left(t_i\right); \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n\left(t_i\right)\varphi_{n-1}\left(t_i\right) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}^2\left(t_i\right) + ... + B_0 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_0\left(t_i\right)\varphi_{n-1}\left(t_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X\left(t_i\right)}{Y\left(t_i\right)}\varphi_{n-1}\left(t_i\right); \\ ... \\ B_n \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_n\left(t_i\right)\varphi_0\left(t_i\right) + B_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_{n-1}\left(t_i\right)\varphi_0\left(t_i\right) + ... + B_0 \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_0^2\left(t_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{X\left(t_i\right)}{Y\left(t_i\right)}\varphi_0\left(t_i\right); \end{cases}$$

$$\varphi_k\left(t_i\right) = t_i^k - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j t_i^{j-1}}{Y\left(t_i\right)};\ \ k = 0,1,...,n;\ \ N \geq n \cdot$$

Решив ее для $B_0, B_1, ..., B_n$, найдем приближенные значения $A_0, A_1, ..., A_n$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

Пример 1. Рассмотрим динамическую систему, описываемую задачей Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной:

$$D_{0t}^{\alpha} y - \lambda y = x(t), \tag{18}$$

и начальными условиями $D_{0t}^{\alpha-k} y = b_k;\ k = 1,2,...;\ m = [\alpha] + 1$, (19)
где

$$D_{0t}^{\alpha} y = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int\limits_0^t \frac{y(\tau)}{\left(t-\tau\right)^{\alpha-m+1}} d\tau, \tag{20}$$

$\alpha > 0,\ \ m-1 < \alpha \leq m,\ \ \ \lambda \in R$.

Требуется, зная входной сигнал $x(t) = \left(\sqrt{\pi}/2\right)1(t) - 5\sqrt{t}$ и соответствующий выходной сигнал $y(t) = \sqrt{t}$ системы (18) с начальным условием $D_{0t}^{-1/2} y = 0$, найти ее параметры $\alpha,\ \lambda$.

Точные значения параметров системы (18) при входном сигнале $x(t) = \left(\sqrt{\pi}/2\right)1(t) - 5\sqrt{t}$ и выходном сигнале $y(t) = \sqrt{t}$ с начальными условиями $D_{0t}^{-1/2}y=0$ будут $\alpha=1/2$; $\lambda=5$, т. е. динамическая система, параметры которой подлежат определению, описывается задачей Коши:

$$D_{0t}^{1/2}y-5y=x(t), \tag{21}$$

при начальном условии $D_{0t}^{-1/2}y=0$. (22)

Действительно, подставляя $x(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}1(t)-5\sqrt{t}$ и $y(t)=\sqrt{t}$ в (21) с учетом (22), получим верное тождество. Здесь $D_{0t}^{1/2}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}1(t)$ и $D_{0t}^{-1/2}y=0$.

Покажем, что $D_{0t}^{1/2}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}1(t)$. Решением уравнения Абеля [10, пример 123, с. 253] $\int_0^t\frac{y(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}dt=t^n$, является функция $y(t)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+\alpha)}t^{n+\alpha-1}$.
Следовательно, интегральное уравнение

$$\int_0^t\frac{y(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}dt=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)}t^n \tag{23}$$

имеет решение

$$y(t)=t^{n+\alpha-1}. \tag{24}$$

Так как входной сигнал $y(t)=\sqrt{t}$, то при $\alpha=1/2$, из (24) получим $n=1$, т. е.

$$\int_0^t\frac{\sqrt{t}}{(t-\tau)^{1/2}}dt=\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)}t.$$

Из (20) следует

$$D_{0t}^{1/2}y=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\frac{d}{dt}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)}t=\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)}1(t).$$

Покажем, что $D_{0t}^{-1/2}y=0$. При $\alpha=-1/2$ и $y(t)=\sqrt{t}$, из выражения (24) вычислим $n=2$. Тогда $D_{0t}^{-1/2}y=\frac{1}{\Gamma(3/2)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\sqrt{t}}{(t-\tau)^{-(1/2)}}d\tau=\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(3)}\frac{d}{dt}t^2=\frac{\sqrt{\pi}}{6}t$, где $D_{0t}^{-1/2}y=0$ при $t=0$.

Изображения входного $x(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}1(t)-5\sqrt{t}$ и выходного $y(t)=\sqrt{t}$ сигналов имеют вид $X(p)=\left(\sqrt{\pi}/2p^{2/3}\right)\left(p^{1/2}-5\right)$ и $Y(p)=\sqrt{\pi}/2p^{(3/2)}$.

Подставляя данные изображения и начальные условия $b_1=D_{0t}^{-1/2}y=0$ в (4) получим

$$p^{\alpha}-\lambda=p^{1/2}-5. \tag{25}$$

Отсюда находим параметры системы $\alpha = 1/2$; $\lambda = 5$, которые совпадают с точными значениями.

Входной, выходной сигналы и начальные условия были выбраны таким образом, чтобы значения искомых параметров из выражения (25) вычислялось аналитически (по виду выражения). В общем случае применяются методы коллокаций и наименьших квадратов.

Пример 2. Рассмотрим динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями с дробной производной

$$D_{0t}^{\alpha} y + \mu D_{0t}^{\beta} y + \lambda y = x(t), \qquad (26)$$

и начальными условиями

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-k} y = a_k, \ k = 1, 2, ..., \ \ n = [\alpha] + 1, \\ D_{0t}^{\beta-k} y = b_k, \ k = 1, 2, ..., \ \ m = [\beta] + 1. \end{cases} \qquad (27)$$

Здесь $D_{0t}^{\alpha} y = \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \dfrac{d^n}{dt^n} \displaystyle\int_0^t \dfrac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$, $D_{0t}^{\beta} y = \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \dfrac{d^m}{dt^m} \displaystyle\int_0^t \dfrac{y(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau$. Пусть $\alpha, \beta > 0;\ \ \mu, \lambda \in R$.

Требуется, зная входной сигнал $x(t)$ и соответствующий выходной сигнал $y(t)$ системы (26) с начальными условиями (27), найти ее параметры $\alpha, \beta > 0;\ \ \mu, \lambda \in R$.

При входном воздействии $x(t) = \left(\sqrt{\pi}/2\right)1(t) + \dfrac{9\Gamma(5/6)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt[6]{t} - 5\sqrt{t}$ и выходном сигнале $y(t) = \sqrt{t}$, удовлетворяющем условиям $D_{0t}^{-1/2} y = 0,\ \ D_{0t}^{-2/3} y = 0$, точные значения параметров системы (26), (27) будут $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/3$, $\mu = 3,\ \lambda = -5$. Это можно показать по аналогии с примером 1.

Изображения входного $x(t) = \left(\sqrt{\pi}/2\right)1(t) + \dfrac{9\Gamma(5/6)}{2\sqrt{\pi}} \sqrt[6]{t} - 5\sqrt{t}$ и выходного сигналов $y(t) = \sqrt{t}$, удовлетворяющего условиям $D_{0t}^{-1/2} y = 0,\ D_{0t}^{-2/3} y = 0$, имеют вид: $X(p) = \left(\sqrt{\pi}/2p^{3/2}\right)\left(p^{1/2} + 3p^{1/3} - 5\right)$ и $Y(p) = \sqrt{\pi}/2p^{3/2}$.

Подставляя данные изображения и начальные условия $a_1 = D_{0t}^{-1/2} y = 0,\ \ b_1 = D_{0t}^{-2/3},\ y = 0$ в (4) получим

$$p^{\alpha} + \mu p^{\beta} + \lambda = p^{1/2} + 3p^{1/3} - 5.$$

Отсюда находим параметры $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/3$, $\mu = 3$, $\lambda = -5$ системы, которые совпадают с точными значениями. Следовательно, динамическая система (26) с начальными условиями (27) будет описываться задачей Коши дифференциального уравнения с дробной производной

$$D_{0t}^{1/2} y + 3D_{0t}^{1/3} y - 5y = x(t)$$

при начальных условиях $D_{0t}^{-1/2} y = 0,\ \ D_{0t}^{-2/3} y = 0$.

Выводы. В работе предложен метод идентификации параметров динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков. Решение модельных примеров показало высокую эффективность метода.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Нахушев А. М.** Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

2. **Самко С. Г., Килбас А. А., Марычев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

3. **Учайкин В. В.** Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.

4. **Бойков И. В.** Аналитические методы идентификации динамических систем: Учеб. пособие// Пенза: Изд – во Пенз. политех. ин–та., 1992.

5. **Бойков И. В., Кривулин Н. П.** Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами // Метрология. 2012. №8. С. 3 – 14.

6. **Методы** классической и современной теории автоматического управления: Учебник / Под ред. Пупкова К. А., Егупова Н. Д. // М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.

7. **Березин И. С., Жидков Н. П.** Методы вычислений. М.: Наука, 1966.

8. **Бойков И. В.** Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун–та., 2004.

9. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

10. **Мартыненко В. С.** Операционное исчисление: Учеб. пособие. 4-е изд., перераб. и доп. // Киев: Выща школа, 1990.

Дата принятия 26.06.2013 г.