621.317.0880

# РАСЧЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ НЕАДЕКВАТНОСТЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА

***Н. А. РУБИЧЕВ***

*Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Москва, Россия, e-mail: vechibur@mail.ru*

*Предложен метод расчета стандартной неопределенности измерения параметров математической модели из-за неадекватности самой модели, основанный на методе пересчета минимального значения критерия отличия при измерении параметров в область их неопределенности. Рассмотрен пример, иллюстрирующий общие соотношения.*

***Ключевые слова:*** *неопределенность измерений, параметры математической модели.*

*The method of calculation of the standard uncertainty of measurement of mathematical model parameters due to inadequacy of the model it self based on the method of recalculation of the minimal criterion of differences value at measurement of parameters in the uncertainty region is suggested. An example illustrating the common ratios is considered.*

***Key words:*** *uncertainty of measurements, mathematical model parameters.*

В ранних работах [1, 2], посвященных расчету неопределенности измерений, не применялись понятия «истинное значение измеряемой величины» и «погрешность измерения», поскольку они не могли быть известны точно. Однако в последние годы появилась более правильная тенденция совместного использования результатов расчета неопределенности и анализа погрешностей измерения [3]. Так, эти понятия продолжают применяться в метрологии при теоретических исследованиях. Следует отметить, что в процессах как расчета неопределенности, так и анализа погрешностей предполагается, что разброс результатов измерений обусловлен методами, средствами и условиями измерений, а также действиями операторов. При этом, по крайней мере теоретически, предполагается, что истинное значение не имеет разброса и неопределенности. Так, из десяти источников неопределенности (они же источники погрешности), перечисленных в Руководстве [1], только «аппроксимации и предположения, используемые в методах измерения и измерительной процедуре» имеют слабое отношение к истинному значению. Однако существует класс измеряемых величин, для которых можно говорить о неопределенности истинного значения, обусловленной свойствами только исследуемого объекта. Это – параметры математических моделей, применяемых для описания исследуемого объекта. Отметим, что речь идет не о математической модели измерения [1, п. 3.1.6; п. 4.1], неполнота или неадекватность которой приводят к неопределенности, связанной с процессом измерения, а о математической модели, служащей для описания исследуемого объекта. Поскольку для описания одного и того же объекта могут использоваться различные модели, в которые входят различные по своему смыслу параметры, можно считать, что вид модели определяет цель измерения или, другими словами, измерительную задачу.

Задача измерения параметров математической (функциональной) модели является аппроксимационной и в общем случае формулируется следующим образом.

Пусть исследуемый объект характеризуется физическими величинами $x_1,..., x_n$, предположим, что они удовлетворяют уравнению связи вида

$$\psi(x_1,..., x_n,\ a_1,..., a_m) = 0, \tag{1}$$

где $\psi(\cdot)$ – известная (заданная) функциональная зависимость (математическая модель), в которую кроме аргументов $x_1,..., x_n$ входят параметры $a_1,..., a_m$, определяемые в результате измерения.

Уравнение связи иногда задается в иной форме

$$x_n = f(x_1,..., x_{n-1},\ a_1,..., a_m). \tag{2}$$

Вид функции $f$ определяется путем решения (1) относительно $x_n$; смысл параметров $a_1,..., a_m$ при этом сохраняется.

Если величины $x_1,..., x_n$ имеют одинаковый физический смысл, например, являются пространственными координатами, то удобнее использовать уравнение связи в форме (1). Однако чаще это разные физические величины, например, напряжение, сила тока и время. В этом случае уравнение связи удобнее использовать в форме (2).

Результаты измерения параметров $a_{k\text{изм}}$ необходимо выбирать такими, чтобы функции $\psi(x_1,..., x_n, a_{1\text{изм}},..., a_{m\text{изм}})$ или $f(x_1,..., x_{n-1}, a_{1\text{изм}},..., a_{m\text{изм}})$ как можно меньше отличались от первичной измерительной информации, которую условно обозначим $I_0$. Она представляет собой отсчеты величин $x_1,..., x_n$, результаты сканирования и др. Количественная оценка отличия $\psi(x_1,..., x_n, t, a_1,..., a_m)$ и $I_0$, которую назовем критерием отличия, – функционал $F\{\psi; I_0\}$, удовлетворяющий двум очевидным условиям: он обращается в нуль при точном совпадении результатов эксперимента с моделью при конкретных значениях параметров и не может быть отрицательным. Наиболее часто применяют критерии равномерного приближения, квадратичный и модульный. Подходы к выбору критериев и их свойства рассмотрены в [4].

После введения количественного критерия отличия экспериментальных данных от математической модели для определения результатов измерения параметров $a_1$, ..., $a_m$ следует использовать условие

$$F\{\psi(x_1,...,x_n,a_1,...,a_m);I_0\}=\min_{a_1,...,a_m}.$$

Результатами измерения будут значения параметров $a_{1\text{изм}},..., a_{m\text{изм}}$, обеспечивающие выполнение данного условия. Очевидно, что для различных критериев будут найдены различные алгоритмы обработки и, следовательно, для одной и той первичной информации будут получены разные измеренные значения параметров. Это обстоятельство – одно из свидетельств неоднозначности истинных значений параметров.

Минимальное значение критерия отличия $F_{\min}= F\{\psi(x_1, ..., x_n, a_{1\text{изм}},..., a_{m\text{изм}}); I_0\}$ может трактоваться как интегральная оценка неопределенности, обусловленная совместным влиянием всех факторов. Если их влияние исключено и математическая модель (1) будет точно описывать объект, то $F_{\text{мин}}= 0$. Другими словами, экспериментальные данные в этом случае точно совпадают с результатами математического моделирования при измеренных значениях параметров. Однако всякая математическая модель – лишь приближение к реальности, и экспериментальные данные всегда будут несколько отличаться от теоретических. Поэтому из-за ее неадекватности даже при отсутствии других источников неопределенности $F_{\min} \neq 0$, т. е. будет некоторая неопределенность, зависящая только от свойств исследуемого объекта и трактующаяся как неопределенность истинных значений параметров.

Эта неопределенность давно учитывается в практике измерений. Например, при некруглости детали 0,01 мм (критерий отличия реальной формы от математической модели в виде окружности) никогда не ставится задача измерения диаметра (параметра математической модели) с допускаемой погрешностью 1 – 2 мкм. Аналогично, если прямоугольный импульс (математическая модель) имеет неравномерность вершины и выброс (различные оценки отличия от математической модели) в несколько процентов, то не ставится задача измерения амплитуды (параметра математической модели) с относительной погрешностью менее 1 %.

В [5] предложен метод пересчета интегральной неопределенности $F_{\min}$ в область возможных истинных значений параметров $D$[1]. В соответствии с ним рассчитывался критерий отличия модели с измеренными значениями параметров $a_{k\text{изм}}$ от модели, параметры которой отличаются от $a_{k\text{изм}}$ на $\Delta a_k$. При этом к области неопределенности $D$ возможных значений параметров относились все совокупности значений $(\Delta a_1, \Delta a_m)$, для которых отличие сравниваемых моделей не превышает $F_{\min}$. Тогда область неопределенности $D$ можно определить из условия

$$F\{\psi(x_1,...,x_n;\ a_{1\text{изм},}\ a_{m\text{изм}});\ \psi(x_1,...,x_n;\ \ a_{1\text{изм}}+\Delta a_{1,...,}\ a_m+\Delta a_{m\text{изм}})\} \leq F_{\min}. \quad (3)$$

В соответствии с [1, 2] стандартная неопределенность $u$ определена как неопределенность результата измерений, выраженная в виде среднего квадратического отклонения (СКО) $S$. Если результатом измерения являются несколько величин, используемых в дальнейшем совместно, то кроме СКО при оценке неопределенности должны вычисляться ковариации или коэффициенты корреляции. Для определения этих вероятностных характеристик необходимо знать многомерное рас-

---

[1] В период работы над материалом термин «неопределенность» не использовался широко в теоретической метрологии. Поэтому в [5] был предложен термин «квазипогрешность рассогласования», который по смыслу аналогичен введенному позже термину «неопределенность».

пределение значений, которые могут быть обоснованно приписаны измеряемым величинам. В рассматриваемой задаче отклонения всех приписываемых значений параметров от результата измерения лежат в ограниченной области *D*. Аналогично заданию распределений входных величин при расчете суммарной неопределенности [1], распределение можно предположить равномерным в этой области

$$w(x_1,\dots,x_m)=\begin{cases}\left[\int\limits_D\dots\int d\alpha_1\dots d\alpha_m\right]^{-1} \text{ при } (x_1,\dots,x_m)\in D;\\ 0 \text{ при } (x,\dots,x)\notin D.\end{cases} \tag{4}$$

В данном случае предположение о равномерности распределения представляется рациональным, но оно не имеет строгого обоснования, как для нормального распределения при выполнении условий центральной предельной теоремы или прямоугольного (равномерного) распределения при округлении. Единственным обоснованием может быть то, что любое другое распределение будет не более обоснованным, но более сложным.

Тогда стандартная неопределенность измерения $k$-го параметра выражается как

$$u_k=S_k=\sqrt{\int\limits_D\dots\int x_k^2dx_1\dots dx_m\Big/\int\limits_D\dots\int dx_1\dots dx_m}\,. \tag{5}$$

Ковариация $i$-го и $k$-го параметров задается соотношением

$$\operatorname{cov}(\alpha_i;\alpha_k)=\int\limits_D\dots\int x_i\,x_k dx_1\dots dx_m\Big/\int\limits_D\dots\int dx_1\dots dx_m\,. \tag{6}$$

Область *D,* определенная в соответствии с (3), практически всегда отлична от $m$-мерного прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат. Поэтому произведения безусловных плотностей вероятности меньшей размерности, в частности, одномерных, полученных путем интегрирования в бесконечных пределах по неинтересующим аргументам закона распределения (6), не будет совпадать с этим законом. Из этого следует, что предположение о равномерности многомерного распределения плотности вероятности в пределах области *D* приводит к статистической зависимости неопределенностей измерения различных параметров.

П р и м е р . Пусть две величины связаны линейной зависимостью $x_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1$ и $0 \le x_1 \le X$. Рассмотрим два критерия отличия.

*Квадратичный критерий* имеет вид

$$F = \int_0^X [x_{2изм}(x_1) - \alpha_1 - \alpha_2 x_1]^2 dx_1 ,$$

где $x_{2изм}(x_1)$ – экспериментально полученная функция.

Тогда в соответствии с (3) получим, что область $D$ задана условием

$$\int_0^X [\alpha_{1изм} + \Delta\alpha_1 + (\alpha_{2изм} + \Delta\alpha_2)x_1 - \alpha_{1изм} - \alpha_{2изм}x_1]^2 dx =$$
$$= (\Delta\alpha_1)^2 X + \Delta\alpha_1\Delta\alpha_2 X^2 + (\Delta\alpha_2)^2 X^3/3 \le F_{\min} .$$

В рассматриваемом случае область $D$ представляет собой эллипс, центр которого совпадает с началом координат, а большая ось имеет отрицательный наклон, т. е. проходит через второй и четвертый квадранты. При этом длины полуинтервалов обоснованно приписываемых значений параметров будут равны

$$a_1 = 2\sqrt{F_{\min}/X}; \quad a_2 = 2\sqrt{3F_{\min}/X^3} .$$

Из (4) рассчитаем $w(x_1, x_2) = 0{,}0918X^2/F_{\min}$ для аргументов $x_1$, $x_2$, принадлежащих области $D$.

В соответствии с (5), (6) имеем

$$u_1 = S_1 = \sqrt{F_{\min}/X} ; \quad u_2 = S_2 = \sqrt{3F_{\min}/X^3};$$
$$\mathrm{cov}(\alpha_1, \alpha_2) = -1{,}5\, F_{\min}/X^2 .$$

В данном случае стандартные неопределенности в два раза меньше. Коэффициенты корреляции неопределенностей $u_1$, $u_2$ оказываются отрицательными, равными –0,86 и соответствуют отрицательному наклону большой оси.

*Модульный критерий* имеет вид

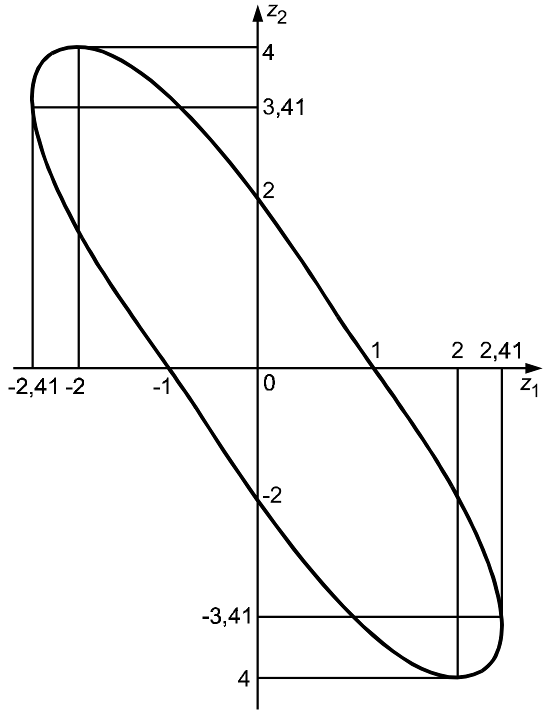
$$F = \int_0^X \left| x_{2изм}(x_1) - \alpha_1 - \alpha_2 x_1 \right| dx .$$

В соответствии с (3) получим, что область $D$ задана условием

$$\int_0^X \left| \alpha_{1изм} + \Delta\alpha_1 + (\alpha_{2изм} + \Delta\alpha_2)x_1 - \alpha_{1изм} - \alpha_{2изм}x_1 \right| dx =$$

$$= \int_0^X \left| \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 x_1 \right| dx \le F_{\min}.$$

В этом случае она имеет более сложную форму. В первом и третьем квадрантах ее ограничивают отрезки прямых $\Delta\alpha_1 X + \Delta\alpha_2 X^2/2 = F_{\min}$ и $-\Delta\alpha_1 X - \Delta\alpha_2 X^2/2 = F_{\min}$, а во втором и четвертом квадрантах – дуги эллипсов $\Delta\alpha_2 X^2/2 + \Delta\alpha_1 X + (\Delta\alpha_1)^2/2\Delta\alpha_2 = F_{\min}$ и $-\Delta\alpha_2 X^2/2 - \Delta\alpha_1 X - (\Delta\alpha_1)^2/2\Delta\alpha_2 = F_{\min}$. На рисунке область $D$ показана в нормированных




Изображение области возможных истинных значений параметров $D$ в нормированных координатах

координатах $z_1 = \Delta\alpha_1 X/F_{\min}$ и $z_2 = \Delta\alpha_2 X^2/F_{\min}$ (рисунок приведен только для модульного критерия, так как в данном случае область имеет более сложную структуру, чем при квадратичном критерии).

Длины полуинтервалов приписываемых значений задаются соотношениями

$$a_1 = 2{,}41\, X/F_{\min};\quad a_2 = 4X^2/F_{\min}.$$

Для полученной области $D$ из (4) – (6) имеем

$$w(x_1, x_2) = 0{,}07 X^3 / F_{\min}^2\ ;$$
$$u_1 = S_1 = 1{,}186 F_{\min} / X\ ;$$
$$u_2 = S_2 = 2{,}1073 F_{\min} / X^2\ ;$$
$$\operatorname{cov}(\alpha_1, \alpha_2) = -1{,}39 F_{\min}^2 / X^3\ .$$

Заметим, что стандартная неопределенность также (как и для квадратичного критерия) почти в два раза меньше длины полуинтервала приписываемых значений. Коэффициенты корреляции неопределенностей $u_1$, $u_2$ также будут отрицательными и равными –0,556, что по абсолютной величине несколько меньше значения, полученного для квадратичного критерия. Сравнение стандартных неопределенностей для рассмотренных случаев не представляется возможным, поскольку критерии отличия $F$ имеют различные размерность и различный физический смысл.

Безусловные одномерные распределения приписываемых значений могут быть получены интегрированием в бесконечных пределах двумерной плотности вероятности по аргументу, соответствующему другому параметру. Поскольку внутри области $D$ двумерная плотность вероятности равномерна, то интегралы будут представлять собой длины вертикальных (для параметра $\alpha_1$) и горизонтальных (для параметра $\alpha_2$) отрезков, принадлежащих области $D$ и соответствующих аргументам одномерных законов распределения. Следовательно, одномерные распределения будут близки к прямоугольным и скруглены у границ области. В силу этого коэффициенты пересчета длин полуинтервалов в стандартную неопределенность несколько меньше $1/\sqrt{3}$, что характерно для прямоугольного распределения.

Из рассмотренного примера следует, что применение соотношений (5), (6) требует довольно громоздких вычислений, как и алгоритм оценки параметров, вытекающий из условия (3). В обоих случаях вычисления достаточно просто выполняются с помощью различных пакетов прикладных программ.

Результатом анализа погрешностей становится доверительный интервал, в котором находится погрешность измерения. Для расчета доверительных интервалов, как отмечалось в [4, 5], достаточно вокруг области $D$ описать $m$-мерный прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат. Длина ребра полученного параллелепипеда будет близка (практически равна) длине доверительного интервала. Именно так рассчитывались длины полуинтервалов в примере.

Половина длины доверительного интервала совпадает с расширенной неопределенностью, которая часто предпочтительнее стандартной. В этом случае нет необходимости использовать соотношения (5), (6) и определять коэффициент охвата.

Если результаты измерения параметров являются входными величинами для другой измеряемой величины, то для расчета ее суммарной неопределенности необходимы стандартные неопределенности измерения параметров, одной из составляющей которой будет неопределенность, обусловленная неадекватностью математической модели в соответствии с (5), (6).

Величина $F_{\min}$, полученная при совместном действии всех источников неопределенности, может использоваться для интегральной оценки неопределенности измерения параметров. При этом возможно определять область $D$ в соответствии с (3) и величины $a_k$, которые при анализе погрешности могут трактоваться как длины доверительных полуинтервалов, а при расчете неопределенности – как полные расширенные неопределенности. Однако гипотеза равномерности распределения приписываемых значений внутри области $D$ оказывается менее приемлемой. Следовательно, при расчете суммарной неопределенности целесообразно анализировать все входные величины раздельно, включая в их число неопределенность из-за неадекватности математической модели.

Таким образом, соотношение (5) позволяет рассчитать неопределенность измерения параметров математической модели, обусловленную неадекватностью самой модели, а по (6) можно вычислить ковариации этих неопределенностей. При практическом применении этих соотношений из минимального значение критерия отличия $F_{\min}$ должны быть устранены составляющие, обусловленные методическими и аппаратными погрешностями. Это можно сделать или на основе специальных исследований адекватности используемой модели, или теоретическим путем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Руководство** по выражению неопределенности измерения /Пер. с англ. под ред. В. А. Слаева. СПб.: ВНИИМ, 1999.

2. **РМГ 43–2001.** ГСИ. Применение Руководства по выражению неопределенности измерения.

3. **РМГ 91–2009.** ГСИ. Совместное использование понятий «погрешность измерения» и «неопределенность измерения». Общие принципы.

4. **Рубичев Н. А.** Измерительные информационные системы. М.: Изд-во Дрофа, 2010.

5. **Володарский В. Я., Розенберг В. Я., Рубичев Н. А.** Измерительная техника. 1969. № 7. С. 18 – 20; **Volodarskii V. Ya., Rozenberg V. Ya., Rubichev N. A.** Effect on the precision of measurements of the discrepancy between the investigated object and its model //Measurement Techniques. 1969. V. 12. N 7. P. 907 – 910.

*Дата принятия 08.11.2012 г.*