681.2.088

ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Э. Г. МИРОНОВ, А. Н. ЦЫПЛЯШОВ

*Уральский федеральный университет имени первого
президента России Б. Н. Ельцина.
Екатеринбург, Россия, e-mail: mvi@imm.uran.ru*

Рассмотрены принятые по ГОСТ Р 8.736–2011 и предлагаемые методы суммирования погрешностей прямых многократных измерений. Приведены практические рекомендации и примеры оценки результатов суммирования случайной и неисключенной систематической составляющих указанных погрешностей.

Ключевые слова: *многократные измерения, случайные и неисключенные систематические погрешности, методы суммирования.*

The proposed methods of errors summation for direct multiple measurements and the accepted according to GOST R 8.736–2011 methods have been considered. The practical recommendations and the examples of estimation of random and non-exclusive systematic error components summation results are given.

Key words: *multiple measurements,random and non-exclusive systematic errors, summation methods.*

Государственный стандарт [1], введенный в действие с 1 января 2013 г., распространяется на прямые многократные измерения и устанавливает основные положения методов обработки результатов этих измерений и вычисления погрешностей оценки измеряемой величины. Стандарт [1] введен взамен стандарта [2], отмененного в 2012 г.

Сравнение нового и старого стандартов показывает, что они отличаются друг от друга лишь частично, хотя в предисловии к [1] сказано, что он введен впервые. К отличиям можно отнести использование в стандарте [1] современной терминологии, некоторое изменение методов обработки результатов измерений и порядка вычислений неисключенной систематической погрешности. В нем появилось большое приложение, содержащее много справочной информации. Особенно полезно для практики обязательное приложение Е, в котором приведены новые правила округления результатов измерений и их погрешностей. Отметим, что в этой области существовали некоторые разногласия: например, правило округления при отбрасывании цифры пятью разными литературными источниками толковалось по-разному.

В [1] перешли основные положения и вместе с ними недостатки стандарта [2]. В [3, 4] показано, что использование стандарта [2] приводит в ряде случаев к противоречивым результатам. Так, при суммировании неисключенной систематической и случайной погрешностей может оказаться, что суммарная погрешность меньше одного из слагаемых. В [5] отмечена сложность и громоздкость необходимых вычислений.

Оба указанных недостатка присущи и новому стандарту. Для иллюстрации сказанного рассмотрим порядок вычисления погрешности результатов измерения по [1]. При решении поставленной задачи оцениваются следующие величины:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (1)$$

где $\bar{x}$ – среднее арифметическое значение; n – число измерений; x_i – результат i-го измерения.

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} , \qquad (2)$$

где S – среднее квадратичное отклонение (СКО);

$$S_{\bar{x}} = S/\sqrt{n} , \qquad (3)$$

где $S_{\bar{x}}$ – СКО среднего арифметического значения;

$$\varepsilon = tS_{\bar{x}} , \qquad (4)$$

где ε – доверительные границы случайной погрешности (далее – случайная погрешность); t – коэффициент Стьюдента.

$$\Theta = \pm k\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\Theta_j^2} , \qquad (5)$$

где Θ – доверительные границы неисключенной систематической погрешности (далее – НСП); Θ_j – j-я составляющая НСП; m – число слагаемых; k – коэффициент, зависящий от принятой доверительной вероятности P и числа слагаемых m, для P=0,99 и $m \geq 2$;

$$\Delta = KS_{\Sigma}, \qquad (6)$$

где Δ – доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины (в дальнейшем – суммарная погрешность); K – коэффициент; S_{Σ} – суммарное СКО;

$$K = (\Theta + \varepsilon) \big/ (S_{\Theta} + S_{\bar{x}}), \qquad (7)$$

где S_{Θ} – СКО неисключенной систематической погрешности;

$$S_{\Theta} = \Theta \big/ (k \cdot \sqrt{3}), \qquad (8)$$

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\Theta}^2 + S_{\bar{x}}^2}. \qquad (9)$$

Отметим, что S_{Θ} определяют из предположения, что неисключенная систематическая погрешность, рассматриваемая как случайная величина, подчиняется равномерному закону распределения (отсюда в знаменателе соотношения (8) присутствует $\sqrt{3}$).

Как было указано, суммарная погрешность Δ может оказаться меньше одного из слагаемых. Особенно заметен этот эффект при малом числе измерений, доверительной вероятности $P = 0{,}99$ и значительном отличии суммируемых величин друг от друга. Для иллюстрации описанного «парадокса» рассмотрим численный пример по оценке погрешности прямых многократных измерений в соответствии с требованиями стандарта [1].

Пример 1. Проведены многократные *(n = 4)* измерения постоянного электрического напряжения U и получены следующие значения: 220, 216, 222, 218 В. Верхний предел измерения вольтметра $U_{к}$ = 300 В; класс точности 0,5. Методическая погрешность проведенных измерений $\Delta_{М}$ = 0,72 В; доверительная вероятность Р = 0,99; закон распределения результатов измерений принимается нормальным.

Вычисления по (1) – (9) с заданной доверительной вероятностью дали следующие результаты:

$\bar{x} = \bar{U} = 219$ В;	$S = 2{,}5820$ В;	$S_{\bar{U}} = 1{,}2910$ В;	$\varepsilon = 5{,}6105$ В;
$\Theta = 1{,}9966$ В;	$K = 3{,}3785$;	$S_{\Sigma} = 1{,}6092$ В;	$\Delta = \pm 5{,}4367$ В.

После округления суммарной погрешности до десятых долей получаем $\Delta' = \pm 5{,}4$ В и результат измерения постоянного электрического напряжения с учетом этой погрешности $\bar{U} = (219{,}0 \pm 5{,}4)$ В.

Из результатов вычислений следует, что округленное до десятых долей значение случайной составляющей погрешности $\varepsilon' = 5{,}6$ В, а суммарная погрешность при таком округлении составила только 5,4 В, т.е. одно из слагаемых (случайная погрешность) оказалось больше суммы на 0,2 В (примерно на 4 %). При других соотношениях параметров “парадокс” может достигать (14—17) %.

Для преодоления описанного недостатка стандарта [1] и упрощения вычислений предлагается оценивать суммарную погрешность измерения по соотношению

$$\Delta = \sqrt{\Theta^2 + \varepsilon^2} \cdot \qquad (10)$$

Геометрическое суммирование по (10) используется для случайных величин (см., например [6, 7]). В нашем случае случайная погрешность ε является случайной величиной по определению. Неисключенная систематическая погрешность Θ, строго говоря, является систематической составляющей суммарной погрешности. Вместе с тем, стандарт [1] рассматривает Θ при суммировании ее с ε как случайную величину с равномерным законом распределения (см. (8), (9)).

Таким образом, геометрическое суммирование по (10) не противоречит требованиям стандарта [1] и хорошо согласуется с общепринятыми положениями метрологии, приведенными в [6, 7].

Проиллюстрируем суммирование по (10) на численном примере.

Пример 2. С использованием условий примера (1) и результатов вычислений $\bar{x} = \bar{U} = 219$ В по (1), $\varepsilon = 5{,}6105$ В по (4) и $\Theta = 1{,}9966$ В по (5) находим согласно (10) суммарную погрешность измеряемой величины $\Delta = \pm 5{,}4367$ В.

После округления полученных погрешностей до одного знака после запятой имеем: $\varepsilon' = 5{,}6$ В; $\Theta' = 2{,}0$ В; $\Delta' = 6{,}0$ В.

Результат измерения с учетом погрешности принимает вид $U' = (219{,}0 \pm 6{,}0)$ В. Таким образом, случайная погрешность ε' меньше суммарной погрешности Δ', рассчитанной по (10), как и должно быть при непротиворечивом суммировании (без «парадоксов»).

Отметим, что для наглядности округление значений погрешностей проведено с некоторым отступлением от действующих правил округления. Согласно [1] значение погрешности округляют до одной значащей цифры, если первая значащая цифра округляемого числа при движении слева направо больше или равна трем. Этот случай присутствует в приведенных примерах.

При округлении по этим правилам в первом примере получаем: $\varepsilon' = 6$ В; $\Delta' = \pm 5$ В; $\overline{U'} = (219 \pm 5)$ В. Легко увидеть, что при “правильном” округлении “парадокс” от суммирования по [1] стал еще заметнее: одно из слагаемых (случайная погрешность) оказалась больше суммы (суммарной погрешности) на 1 В (примерно на 17%).

Во втором примере при округлении по правилам получаются следующие значения: $\varepsilon' = 6$ В; $\Delta' = \pm 6$ В; $\overline{U'} = (219 \pm 6)$ В. При этом случайная и суммарная погрешности равны между собой, что вполне допустимо при малой систематической погрешности, которой можно пренебречь.

Выводы. При суммировании погрешностей по [1] вычисления дают противоречивые результаты: суммарная погрешность может оказаться меньше одного из слагаемых. Предложенный метод суммирования свободен от этого недостатка: суммарная погрешность по (10) всегда больше любого из слагаемых или (в отдельных случаях) равна ему. Другое достоинство предложенного метода – его меньшая трудоемкость по сравнению с методом, используемым в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. **ГОСТ Р 8.736–2011. ГСИ.** Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения.

2. **ГОСТ 8.207–76. ГСИ.** Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения.

3. **Миронов Э. Г., Ордуянц Г. Ж.** Оценка возможностей методов суммирования погрешностей прямых измерений // Измерительная техника. 1995. №4. С. 10–12; **Mironov E. G., Orduyantz G. Zh.** Estimation of potentialities of methods of summation of direct measurement errors //Measurements techniques. 1995. V. 38. N 4. P. 372–376.

4. **Миронов Э. Г., Ордуянц Г. Ж.** Суммирование случайной и неисключенной систематической составляющих погрешности прямых измерений. // Измерительная техника. 1998. № 6. С. 9–11; **Mironov E. G.; Orduyantz G. Zh.** Summation of random and residual systematic components of errors in direct measurements // Measurements techniques. 1998. V. 41. N 6. P. 504–506.

5. **Шевелев А. В., Зацепилова Ж. В.** Метод определения суммарной погрешности измерения // Метрология. 2010. № 8. С. 3–7.

6. **Рабинович С. Г.** Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978.

7. **Новицкий П. В., Зограф И. А.** Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1991.

Дата принятия 22.08.2013 г.